Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

POINT D'INFLEXION 5

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[\,0,5\,;\,12\,]$:

Ici: $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$, pour tout $x \in [\,0,5\,;\,12\,]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[\,0,5\,;\,12\,]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [\,0,5\,;\,12\,]$:

- $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
- $f''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,0,5\,;\,12\,]$: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.

2. La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?

Soient f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Soit " a " un réel appartenant à I.

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, pour tout $x \in [\,0,5\,;\,12\,]$: $f''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.

Distinguons 2 cas:

- **1er cas:** $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \geqslant 0$

<=> $\frac{-x+2}{x^3} \geqslant 0$

<=> $-x + 2 \geqslant 0$ (car: $x^3 > 0$ sur $[\,0,5\,;\,12\,]$)

cad ssi: $x \leqslant 2$.

- **2e cas:** $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \leqslant 0$

<=> $-x + 2 \leqslant 0$ (car: $x^3 > 0$ sur $[\,0,5\,;\,12\,]$)

cad ssi: $x \geqslant 2$.

Dans ces conditions: en $x = 2$, f'' s'annule en changeant de signe.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 2$.