Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 9

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-20\,;\,20]$:

Ici: $f(x) = (-2x + 30)\, e^{0,2x-3}$, pour tout $x \in [-20\,;\,20]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[-20\,;\,20]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-20\,;\,20]$:

- $f'(x) = (-2) \times (e^{0,2x-3}) + (-2x + 30) \times (0,2\, e^{0,2x-3})$

  $= (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3}$.

- $f''(x) = (-0,4) \times (e^{0,2x-3}) + (-0,4x + 4) \times (0,2\, e^{0,2x-3})$

  $= (-0,08x + 0,4)\, e^{0,2x-3}$.

Ainsi, pour tout $x \in [-20\,;\,20]$:

$$f'(x) = (-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} \quad \text{et} \quad f''(x) = (-0,08x + 0,4)\, e^{0,2x-3}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-20 ; 20]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 10$ $(e^{0,2x-3} > 0)$.

- 2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(-0,4x + 4)\, e^{0,2x-3} \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 10$ $(e^{-0,5x} > 0)$.

Ainsi:
- f est croissante sur $[-20 ; 10]$,
- f est décroissante sur $[10 ; 20]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-20		10		20
f'		$+$	0	$-$	
f			b		
	a				c

Avec:
- $a = f(-20) \Rightarrow a = 70\, e^{-7}$,
- $b = f(10) \Rightarrow b = 10\, e^{-1}$,
- $c = f(20) \Rightarrow c = -10\, e$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours : • f est concave sur un intervalle I ssi :

$$\text{pour tout } x \in I,\ f''(x) \leqslant 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi :

$$\text{pour tout } x \in I',\ f''(x) \geqslant 0.$$

Or ici, pour tout $x \in [-20 ; 20]$: $f''(x) = (-0,08x + 0,4)\, e^{0,2x-3}$.

Dans ces conditions : • $f''(x) \leqslant 0$ ssi : $-0,08x + 0,4 \leqslant 0$ cad : $x \geqslant 5$,

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi : $-0,08x + 0,4 \geqslant 0$ cad : $x \leqslant 5$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{0,2x-3} > 0$)

Ainsi : • f est convexe sur $I' = [-20 ; 5]$,

• f est concave sur $I = [5 ; 20]$.