

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0, 7; 6]$:

Ici: $f(x) = (x^2 - 2x + 1) e^{-2x+6}$, pour tout $x \in [0, 7; 6]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[0, 7; 6]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0, 7; 6]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (2x - 2) \times (e^{-2x+6}) + (x^2 - 2x + 1) \times (-2 \times e^{-2x+6}) \\ &= (-2x^2 + 6x - 4) e^{-2x+6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-4x + 6) \times (e^{-2x+6}) + (-2x^2 + 6x - 4) \times (-2 \times e^{-2x+6}) \\ &= 2(2x^2 - 8x + 7) e^{-2x+6}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 7; 6]$:

$$f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4) e^{-2x+6} \text{ et } f''(x) = 2(2x^2 - 8x + 7) e^{-2x+6}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $-2x^2 + 6x - 4 = 0$.²

$$\Delta = (2)^2 > 0.$$

D'où deux solutions: $x' = 1$ et $x'' = 2$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [0, 7; 6]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 \leq 0 \quad (e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad ssi: } x \in [0, 7; 1] \cup [2; 6]$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 \geq 0 \quad (e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad ssi: } x \in [1; 2]$$

Ainsi: • f est décroissante sur $[0, 7; 1] \cup [2; 6]$,

• f est croissante sur $[1; 2]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0,7	1	2	6	
f'	-	0	+	0	-
f	a	b	c	d	

Avec: • $a = f(0,7) \Rightarrow a = \dots$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 0$,

• $c = f(2) \Rightarrow c = e^2$,

• $d = f(6) \Rightarrow d = 25$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geq 0$.

Or ici, pour tout $x \in [0,7;6]$: $f''(x) = 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x+6}$.

Soit l'équation: $2x^2 - 8x + 7 = 0$.

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 > 0.$$

D'où deux solutions: $x' = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$ et $x'' = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [0, 7; 6]$, sachant que:

$$e^{-2x+6} > 0.$$

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x+6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 \geq 0$$

$$\text{cad: } x \in \left[0, 7; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; 6\right]$$

• 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x+6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 \leq 0$$

$$\text{cad: } x \in \left[\frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right].$$

Ainsi: • f est convexe sur $I' = \left[0, 7; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; 6\right]$,

• f est concave sur $I = \left[\frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right]$.