

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-2; 4]$:

Ici: $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$, pour tout $x \in [-2; 4]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[-2; 4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-2; 4]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (2) \times (e^{-2x}) + (2x + 1) \times (-2e^{-2x}) \\ &= -4x e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-4) \times (e^{-2x}) + (-4x) \times (-2e^{-2x}) \\ &= (8x - 4) e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-2; 4]$:

$$f'(x) = -4x e^{-2x} \text{ et } f''(x) = (8x - 4) e^{-2x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-2; 4]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -4x e^{-2x} \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 0 \quad (e^{-2x} > 0).$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -4x e^{-2x} \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 0 \quad (e^{-2x} > 0).$$

- Ainsi:
- f est croissante sur $[-2; 0]$,
 - f est décroissante sur $[0; 4]$

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-2	0	4
f'	+	0	-
f	a	b	c

- Avec:
- $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^4 + 3$,
 - $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,
 - $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geq 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-2; 4]$: $f''(x) = (8x - 4)e^{-2x}$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ ssi: $8x - 4 \leq 0$ cad: $x \leq \frac{1}{2}$,

• $f''(x) \geq 0$ ssi: $8x - 4 \geq 0$ cad: $x \geq \frac{1}{2}$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-2; \frac{1}{2}]$,

• f est convexe sur $I' = [\frac{1}{2}; 4]$.