Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 4

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-4; 10]$:

Ici: $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)\, e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4; 10]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[-4; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-4; 10]$:

- $f'(x) = (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$$= (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x}.$$

- $f''(x) = (4x - 3) \times (e^{-0,5x}) + (2x^2 - 3x - 14) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$$= \left(4x - 3 - x^2 + \frac{3}{2}x + 7\right) \times e^{-0,5x}$$

$$= \left(-x^2 + \frac{11}{2}x + 4\right) \times e^{-0,5x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$f'(x) = (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \left(-x^2 + \frac{11}{2}x + 4\right) \times e^{-0,5x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $2x^2 - 3x - 14 = 0$.

$\Delta = (11)^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = -2$ et $x'' = 3,5$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

- **1er cas:** $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $2x^2 - 3x - 14 \leqslant 0$ **cad ssi:** $x \in [-2 ; 3,5]$ $\quad$ ($e^{0,5x} > 0$).

- **2e cas:** $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $2x^2 - 3x - 14 \geqslant 0$ **cad ssi:** $x \in [-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$

($e^{0,5x} > 0$).

Ainsi: • *f est décroissante sur $[-2 ; 3,5]$,*

• *f est croissante sur $[-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$.*

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-4		-2		$3,5$		10
f'		+	0	-	0	+	
f	a	↗	b	↘	c	↗	d

Avec: • $a = f(-4) = 1 - 16\,e^{2}$,

• $b = f(-2) = 1 + 12\,e$,

• $c = f(3,5) = 1 - 76\,e^{-\frac{7}{2}}$,

• $d = f(10) = 1 - 492\,e^{-5}$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-4\,;\,10]$: $f''(x) = \left(-x^{2} + \frac{11}{2}x + 4\right) \times e^{-0,5x}$.

Soit l'équation: $-x^{2} + \frac{11}{2}x + 4 = 0$.

$\Delta = \frac{185}{4} > 0$.

D'où deux solutions: $x' = \frac{1}{4} \times (11 + \sqrt{185})$ et $x'' = \frac{1}{4} \times (11 - \sqrt{185})$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4\,;\,10]$ sachant que: $e^{-0,5x} > 0$.

• 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $-x^{2} + \frac{11}{2}x + 4 \geqslant 0$

cad: $x \in \left[-\frac{\sqrt{185}-11}{4} ; \frac{\sqrt{185}+11}{4} \right]$.

• 2ᵉ cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $-x^2 + \frac{11}{2}x + 4 \leqslant 0$

cad: $x \in \left[-4 ; -\frac{\sqrt{185}-11}{4} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{185}+11}{4} ; 10 \right]$.

Ainsi: • f est convexe sur $I' = \left[-\frac{\sqrt{185}-11}{4} ; \frac{\sqrt{185}+11}{4} \right]$,

• f est concave sur $I = \left[-4 ; -\frac{\sqrt{185}-11}{4} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{185}+11}{4} ; 10 \right]$.