

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ

3

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-10; 2]$:

Ici: $f(x) = (2 - x)e^x$, pour tout $x \in [-10; 2]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[-10; 2]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-10; 2]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (-1) \times (e^x) + (2 - x) \times (e^x) \\ &= (1 - x)e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-1) \times (e^x) + (1 - x) \times (e^x) \\ &= -xe^x. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-10; 2]$: $f'(x) = (1 - x)e^x$ et $f''(x) = -xe^x$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10; 2]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ ssi $(1-x) \leq 0$ cad ssi: $x \geq 1$ ($e^x > 0$).

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $(1-x) \geq 0$ cad ssi: $x \leq 1$ ($e^x > 0$).

Ainsi: • f est croissante sur $[-10; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; 2]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-10	1	2
f'	$+$	0	$-$
f	a	b	c

Avec: • $a = 12 e^{-10}$,

• $b = e$,

• $c = 0$.

3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geq 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-10; 2]$: $f''(x) = -xe^x$.

Dans ces conditions: • $f''(x) \leq 0$ ssi: $x \geq 0$ cad: $x \in [0; 2]$,
• $f''(x) \geq 0$ ssi: $x \leq 0$ cad: $x \in [-10; 0]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

Ainsi: • f est convexe sur $I' = [-10; 0]$,
• f est concave sur $I = [0; 2]$.