

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[0; 6]$:

Ici: $f(x) = (10x - 5)e^{-x}$, pour tout $x \in [0; 6]$.

D'après l'énoncé f est deux fois dérivable sur $[0; 6]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [0; 6]$:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= (10) \times (e^{-x}) + (10x - 5) \times (-e^{-x}) \\ &= (-10x + 15)e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= (-10) \times (e^{-x}) + (-10x + 15) \times (-e^{-x}) \\ &= (10x - 25)e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 6]$:

$$f'(x) = (-10x + 15)e^{-x} \text{ et } f''(x) = (10x - 25)e^{-x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 6]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } (-10x + 15)e^{-x} \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq \frac{3}{2} \quad (e^{-x} > 0).$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } (-10x + 15)e^{-x} \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq \frac{3}{2} \quad (e^{-x} > 0).$$

Ainsi: • f est croissante sur $[0; \frac{3}{2}]$,
 • f est décroissante sur $[\frac{3}{2}; 6]$.

b. Tableau de variation de f :

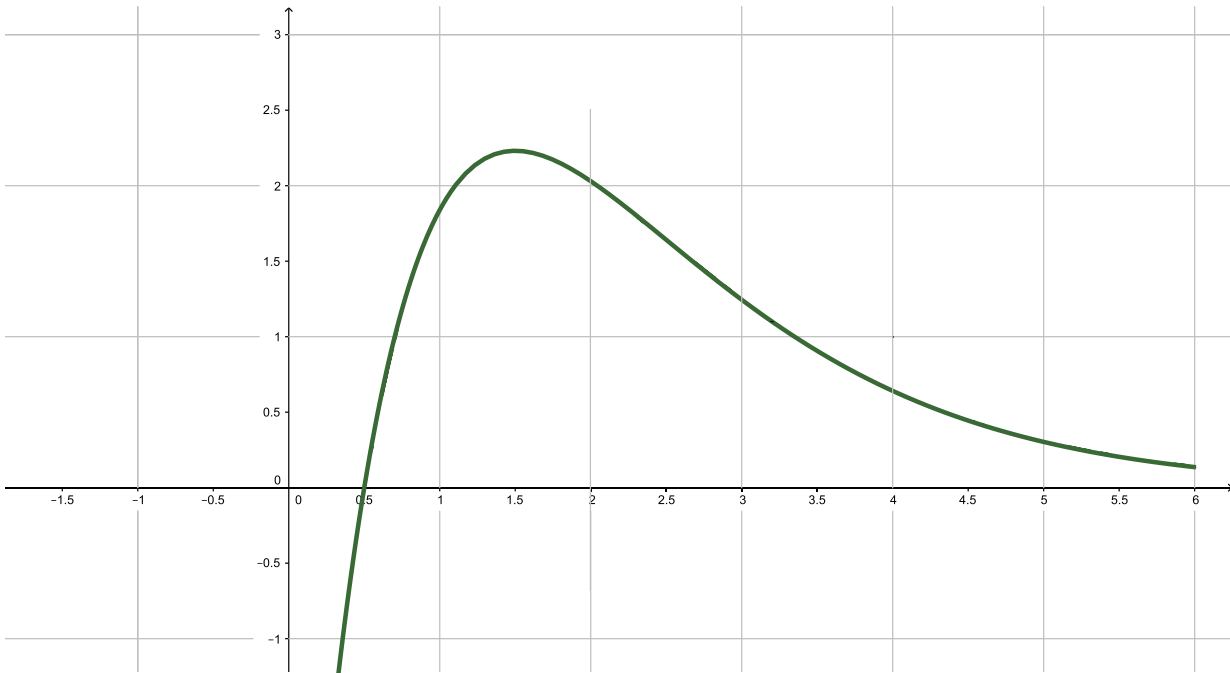
Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	$\frac{3}{2}$	6	
f'		+	0	-
f			b	
	a			c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = -5$,

• $b = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 10e^{-3/2} > 0$,

• $c = f(6) \Rightarrow c = 55e^{-6} > 0$.



3. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout $x \in [0; 6]$: $f''(x) = (10x - 25)e^{-x}$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; 6]$:

• 1^{er} cas: $f''(x) \geq 0$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } (10x - 25)e^{-x} \geq 0 \text{ cad ssi: } x \geq \frac{5}{2} \quad (e^{-x} > 0).$$

• 2^e cas: $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } (10x - 25)e^{-x} \leq 0 \text{ cad ssi: } x \leq \frac{5}{2} \quad (e^{-x} > 0).$$

- Ainsi:
- f est concave sur $I' = [0; \frac{5}{2}]$,
 - f est convexe sur $I = [\frac{5}{2}; 6]$.