Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 12

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $]0;\ 1,5]$:

Ici: $f(x) = 9x^2(1 - 2\ln(x)) + 10$, pour tout $x \in]0;\ 1,5]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $]0;\ 1,5]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in]0;\ 1,5]$:

- $f'(x) = (18x) \times (1 - 2\ln(x)) + (9x^2) \times \left(\dfrac{-2}{x}\right)$

$= -36x\ln(x)$.

- $f''(x) = (-36) \times (\ln(x)) + (-36x) \times \left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= -36(1 + \ln(x))$.

Ainsi, pour tout $x \in]0;\ 1,5]$:

$$f'(x) = -36x\ln(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = -36(1 + \ln(x)).$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]\,0\,;\,1,5\,]$:

• **1^er cas:** $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-36x \ln(x) \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 1$.

• **2^e cas:** $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-36x \ln(x) \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 1$.

Ainsi: • f est croissante sur $]\,0\,;\,1\,]$,

• f est décroissante sur $[\,1\,;\,1,5\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		1		$1,5$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow a = -\infty$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 19$,

• $c = f(1,5) \Rightarrow c = 30,25 - 40,5 \ln(1,5) > 0$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in]\,0\,;\,1,5\,]$: $f''(x) = -36\,(1 + \ln(x))$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]\,0\,;\,1,5\,]$:

• 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $-36\,(1 + \ln(x)) \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant e^{-1}$.

• 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $-36\,(1 + \ln(x)) \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant e^{-1}$.

Ainsi: • f est convexe sur $I' =]\,0\,;\,e^{-1}\,]$,

• f est concave sur $I = [\,e^{-1}\,;\,1,5\,]$.