

www.freemaths.fr

# Maths Complémentaires Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

1. a. Démontrons que pour tout  $x$  de  $[1; 25]$ ,  $f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$ .

Ici: •  $f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}$   $\left(\frac{u}{v}\right)$

•  $Df = [1; 25]$ .

Posons:  $f = \frac{f_1 - f_2}{f_3}$ , avec:  $f_1(x) = x + 2$ ,  $f_2(x) = \ln(x)$  et  $f_3(x) = x$ .

$f$  est dérivable sur  $[1; 25]$  car  $f_1, f_2$  et  $f_3$  sont dérivables sur  $[1; 25]$ .

(Et: pour tout  $x \in [1; 25]$ ,  $f_3(x) \neq 0$ )

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [1; 25]$ .

Pour tout  $x \in [1; 25]$ :

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times (x) - (x + 2 - \ln(x)) \times (1)}{x^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{(x - 1) - (x + 2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$= \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$$

Au total, pour tout  $x \in [1; 25]$ , nous avons bien:  $f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$ .

1. b. Résolvons dans  $[1; 25]$ , l'inéquation  $-3 + \ln(x) > 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [1; 25]: \quad -3 + \ln(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x) > 3 \\ &\Leftrightarrow e(\ln(x)) > e^3 \\ &\Leftrightarrow x > e^3. \end{aligned}$$

Au total, l'inéquation admet comme solution:  $x \in ]e^3; 25]$ .

1. c. Dressons le tableau des variations de  $f$  sur  $[1; 25]$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $x \in [1; 25]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$f'(x) = 0$  ssi  $-3 + \ln(x) = 0$ , cad:  $x = e^3$  (question précédente).

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$f'(x) < 0$  ssi  $-3 + \ln(x) < 0$ , cad:  $x \in [1; e^3[$ .

• 3<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$f'(x) > 0$  ssi  $-3 + \ln(x) > 0$ , cad:  $x \in ]e^3; 25]$ .

Au total: •  $f$  est décroissante sur  $[1; e^3]$ ,

(car sur  $[1; e^3]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

•  $f$  est croissante sur  $[e^3; 25]$ .

(car sur  $[e^3; 25]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )

Nous pouvons alors dresser le tableau des variations suivant:

|      |     |       |      |
|------|-----|-------|------|
| $x$  | $1$ | $e^3$ | $25$ |
| $f'$ |     | $-$   | $+$  |
| $f$  | $a$ | $b$   | $c$  |

Avec: •  $a = f(1) \Rightarrow a = 3,$

•  $b = f(e^3) \Rightarrow b = 1 - \frac{1}{e^3},$

•  $c = f(25) \Rightarrow c = \frac{27 - \ln(25)}{25}.$

1. d. Montrons que sur  $[1; 25]$ , l'équation  $f(x) = 1,5$  admet une seule solution:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[1; 25]$ , donc sur  $[1; e^3]$ , car:  $1,5 \in [f(e^3); f(1)]$ .

• "  $k = 1,5$  " est compris entre:  $f(e^3) = 1 - \frac{1}{e^3}$

et:  $f(1) = 3$ .

•  $f$  est strictement décroissante sur  $[1; e^3]$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 1,5$  ( $k = 1,5$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à  $[1; e^3]$ , et plus généralement à  $[1; 25]$ .

**Au total:**  $f(x) = 1,5$  admet exactement une solution unique  $\alpha$  sur  $[1; 25]$ .

**1. e. Déterminons un encadrement d'amplitude 0,01 de  $\alpha$ :**

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de  $\alpha$ :

$\alpha \in ]2,31; 2,32[$  à  $10^{-2}$  près.

**Au total:**  $\alpha \in ]2,31; 2,32[$  à  $10^{-2}$  près.

**2. a. a1. Déterminons le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal:**

D'après l'énoncé: • la fonction  $f$  représente le coût moyen de fabrication d'une pièce électronique (en euros),

•  $x$  correspond au nombre de pièces électroniques (en centaines).

Le coût moyen de fabrication ( $CM$ ) est minimal quand la fonction  $f$  est minimale.

Or, la fonction  $f$  est minimale quand:  $x = e^3$ , d'après le tableau des variations.

Ainsi, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal est d'environ:  $x \approx 20,09$  cad:  $x \approx 2009$  pièces.

2. a. a2. Déterminons le coût moyen minimal, au centime d'euro près:

Cela revient à déterminer:  $f(e^3)$ .

Or:  $f(e^3) = b = 1 - \frac{1}{e^3}$ , d'après le tableau des variations.

Ainsi, le coût moyen minimal pour fabriquer 2009 pièces est d'environ:

$$CM_{\min} \approx 0,95 \text{ euro/pièce.}$$

2. b. Déterminons le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro:

Il s'agit de déterminer  $x$  tel que:  $f(x) \leq 1,5$ .

En ayant recours à la réponse de la question 1. e., nous pouvons affirmer qu'en fabriquant au minimum 232 pièces (2,32 x 100), le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

Au total: en fabriquant au minimum 232 pièces électroniques, le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

2. c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ?

La réponse de la question 2. a. a2 nous indique que le coût moyen minimal est de:

$$0,95 \text{ euro} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

Comme  $0,95 > 0,5$ : non, il n'est pas possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes.