

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur Cf ?

Non.

Justifions le.

L'aire \mathcal{A} du rectangle OPMQ est:

Longueur \times Largeur = $f(x) \times x$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme l'aire \mathcal{A} est fonction de x , elle ne peut pas être constante car $x \in]0;14]$

2. L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

Oui.

Justifions le.

Nous devons calculer la valeur de " x " telle que: $\mathcal{A}'(x) = 0$.

Ici: • $\mathcal{A}(x) = 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

• $D_{\mathcal{A}} =]0;14]$.

Posons: $\mathcal{A} = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = -x$ et $f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $]0;4]$.

f_3 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction "ln", donc dérivable sur $]0;4]$.

Par conséquent, $f_2 \times f_3$ est dérivable sur $]0;4]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;4]$.

Enfin, \mathcal{A} est dérivable sur $]0;4]$ comme somme ($f_1 + f_2 \times f_3$) de 2 fonctions dérivables sur $]0;4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer \mathcal{A}' pour tout $x \in]0;4]$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0;4]: \quad \mathcal{A}'(x) &= 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Dans ces conditions: $\mathcal{A}'(x) = 0$ ssi: $x = 2e$.

- Notons que:
- \mathcal{A} est croissante sur $]0;2e]$
 - \mathcal{A} est décroissante sur $[2e;4]$
 - \mathcal{A} est maximale quand $x = 2e$.

En conclusion: le point $M(2e;f(2e))$ cad $M(2e;1)$ est tel que l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

Cette aire maximale est égale à: $\mathcal{A}_{\max} = 2 \times (2e) - (2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\max} = 2e.$$

Partie B: Modélisation continue

1. a. Étudions le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$:

• Calculons f' :

Ici: • $f(t) = 100 - 75e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

• $Df = [0; +\infty[$.

Posons: $f = f_1 + f_2 \times f_3$, avec: $f_1(t) = 100$, $f_2(t) = -75$ et $f_3(t) = e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[0; +\infty[$.

f_3 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, $h = f_2 \times f_3$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme ($f_1 + h$) de 2 fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0; +\infty[$.

Pour tout $t \in [0; +\infty[$: $f'(t) = 75 \left(\frac{\ln(5)}{10} \right) e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

$$\Rightarrow f'(t) = 7,5 \ln(5) e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}.$$

Au total: pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = 7,5 \ln(5) e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$.

• Étudions le signe de f' sur $[0; +\infty[$:

Pour tout $t \in [0; +\infty[$: $f'(t) > 0$.

Donc pour tout $t \in [0; +\infty[$: f est strictement croissante.

• Dressons le tableau de variation:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

t	0	$+\infty$
f'	+	
f		

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 25$,

• $b = f(+\infty) \Rightarrow b = 100$.

$$\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 100 \text{ car: } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} = 0 \right)$$

1. b. Justifions que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$:

Supposons: $t \geq 10$ (1).

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(5) \times (10)}{10} \geq \ln(5)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(5) \times (10)}{10} \leq -\ln(5)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \leq e^{-\ln(5)}$$

$$\Rightarrow 100 - 75e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \geq 100 - 75 \times \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 100 - 15$$

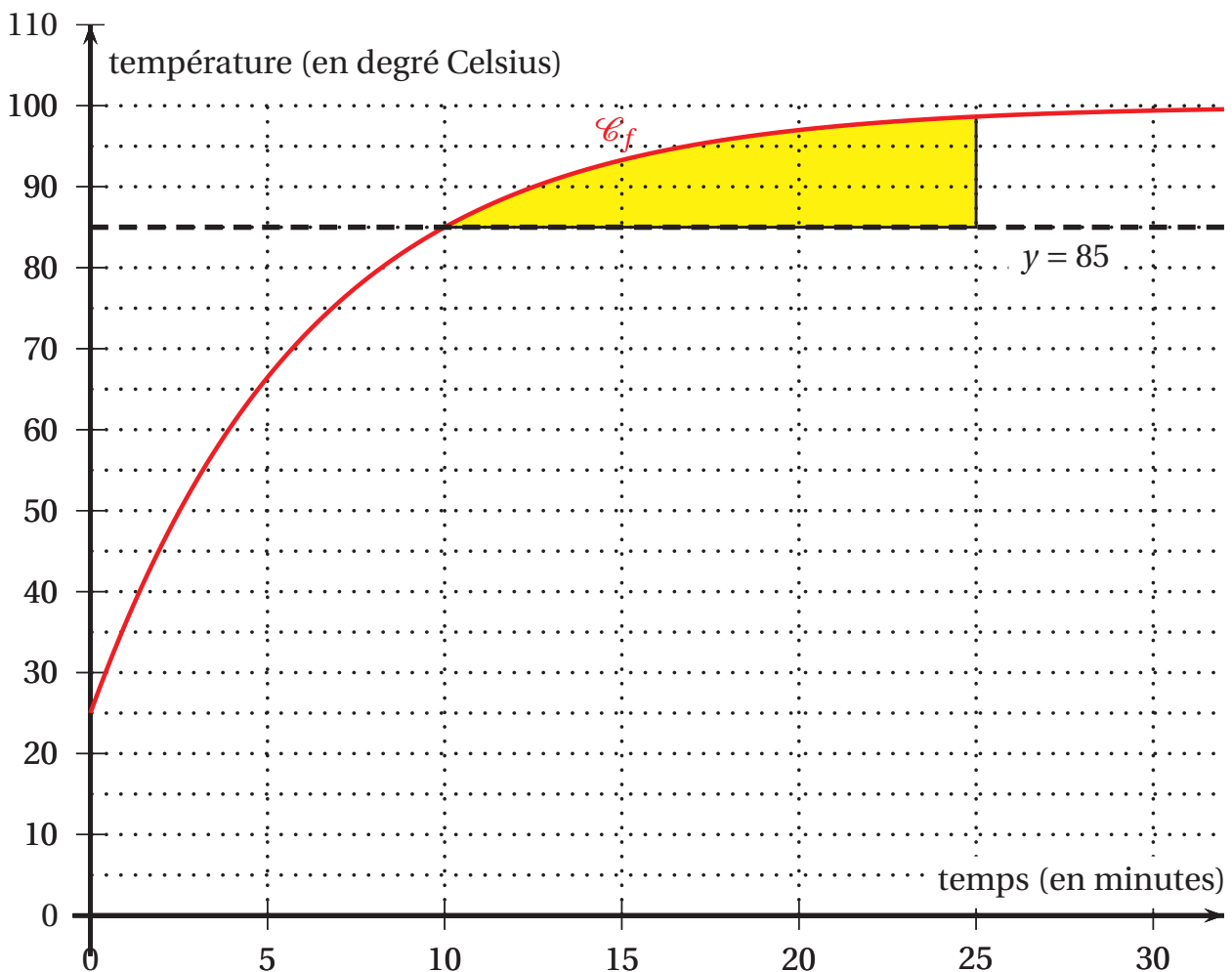
$$\Rightarrow f(t) \geq 85.$$

Au total: si $t \geq 10$, alors $f(t) \geq 85$.

2. a. Justifions, à l'aide du graphique que $\mathcal{A}(25) > 80$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}(25)$ du domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = 25$, $y = 85$ et la courbe représentative de f , est telle que: $\mathcal{A}(25) \approx 100$.

Nous pouvons représenter cette aire $\mathcal{A}(25)$, en jaune, sur le graphique suivant:



En effet:

- un rectangle correspond à 5×5 unités d'aire,
- dans la partie jaune, il y a 3 rectangles entiers + 2 demi-rectangles + des petits morceaux de rectangles, soit au minimum:

$$3 \times (5 \times 5) + 2 \times \left(\frac{5 \times 5}{2}\right) + \varepsilon \text{ cad une centaine d'unités d'aire.}$$

Au total, l'aire demandée $\mathcal{A}(25)$ est telle que: $\mathcal{A}(25) > 80$.

2. b. Montrons que $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt$:

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt.$$

La fonction " $f(t) - 85$ " est continue sur $[0; +\infty[$ donc sur $[10; \theta]$. Elle admet donc des primitives sur $[10; \theta]$ et par conséquent: $\mathcal{A}(\theta)$ existe.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} (100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} - 85) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} (15 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} 15 dt - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt \\ &= [15t]_{10}^{\theta} - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt \\ &\Rightarrow \mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt. \end{aligned}$$

Au total: l'égalité est bien vérifiée.

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes ssi: $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\begin{aligned}
 A(20) > 80 &\Leftrightarrow 15(20-10) - 75 \int_{10}^{20} e^{\frac{20-\ln(5)t}{10}} dt > 80 \\
 &\Leftrightarrow -75 \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt > -70 \\
 &\Leftrightarrow \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt < \frac{7}{7,5}.
 \end{aligned}$$

Posons: $I = \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt.$

Ainsi:
$$\begin{aligned}
 I &= \left[\frac{-10}{\ln(5)} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} \right]_{10}^{20} \\
 &= \frac{-10}{\ln(5)} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} \right] \\
 \Rightarrow I &= \frac{8}{5 \times \ln(5)} > \frac{7}{7,5}.
 \end{aligned}$$

Au total, au bout de 20 minutes, la stérilisation n'est pas finie car: $I > \frac{7}{7,5}.$