

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

«**ln**» : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Modélisation de l'âge d'un épicéa

1. Démontrons que la fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$:

Ici: • $f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$ ($30 \times \ln\left(\frac{u}{v}\right)$)

• $Df =]0; 1[$.

• Calculons f' :

Posons: $f = 30 \ln\left(\frac{g_1}{g_2}\right)$, avec: $g_1(x) = 20x$ et $g_2(x) = 1 - x$.

g_1 et g_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0; 1[$.

Dans ces conditions, $\frac{g_1}{g_2}$ est dérivable sur $]0; 1[$ comme quotient $\left(\frac{g_1}{g_2}\right)$

de 2 fonctions dérivables sur $]0; 1[$, avec: pour tout $x \in]0; 1[$, $g_2(x) \neq 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]0; 1[$ comme composée $\left(\ln\left(\frac{g_1}{g_2}\right)\right)$

de 2 fonctions dérivables sur $]0; 1[$, avec: $\frac{g_1}{g_2} > 0$ sur $]0; 1[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; 1[$.

Pour tout $x \in]0; 1[$:

$$f'(x) = 30 \times \left[\frac{\frac{(20)(1-x) - (20x) \times (-1)}{(1-x)^2}}{\frac{20x}{1-x}} \right] \left(30 \times \frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{30}{x(1-x)}$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1[$: $f'(x) = \frac{30}{x(1-x)}$.

• Pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$?

Oui, sur $]0; 1[$, $f'(x) > 0$.

Au total: sur $]0; 1[$, f est strictement croissante.

2. Déterminons les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge soit compris entre 20 et 120 ans:

Il s'agit ici de déterminer x tel que: $20 \leq f(x) \leq 120$.

$$20 \leq f(x) \leq 120 \Leftrightarrow 20 \leq 30 \times \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 120$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} \leq \frac{20x}{1-x} \leq e^4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leq 20x \leq e^4(1-x)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leq 20x \text{ et } 20x \leq e^4(1-x).$$

$$\bullet e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leq 20x \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} \leq (20 + e^{\frac{2}{3}})x \Rightarrow x \geq \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\bullet 20x \leq e^4(1-x) \Leftrightarrow (20 + e^4)x \leq e^4 \Rightarrow x \leq \frac{e^4}{20 + e^4}.$$

Au total, les valeurs du diamètre D du tronc sont telles que:

$$\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leq D \leq \frac{e^4}{20 + e^4}.$$

En cm, les valeurs du diamètre D du tronc sont telles que: $9 \text{ cm} \leq D \leq 73 \text{ cm}$.

Partie B: Vitesse et hauteur d'un épicéa

1. a. Interprétons le nombre " 0,245 ":

" 0,245 " signifie qu'entre l'âge de 70 ans et l'âge de 80 ans, la hauteur de l'arbre est passée de 15,6 m à 18,05 m, et ce, à un taux de croissance annuel moyen de: " 0,245 mètres par année ".

1. b. Déterminons la formule à entrer dans C_3 :

La formule à entrer dans C_3 est: $\langle\langle = \frac{C_2 - B_2}{C_1 - B_1} \rangle\rangle$.

2. Déterminons la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre vaut 27 cm:

• Détermination de l'âge de l'épicéa ayant 27 cm de diamètre:

Le diamètre vaut 27 cm, d'où: $x = 0,27$ mètre.

Dans ces conditions, l'âge correspondant à 27 cm de diamètre est:

$$y = f(0, 27) \Rightarrow y \approx 60 \text{ ans.}$$

En supposant le taux de croissance annuel moyen égal à 0,22 (entre 50 ans et 70 ans), à l'âge de 60 ans la hauteur attendue de l'épicéa sera de:

$$\frac{11,2 + 15,6}{2} = 13,4 \text{ mètres.}$$

Au total, la hauteur attendue d'un épicéa de diamètre de 27 cm est de:

13,4 mètres.

3. a. Déterminons un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la vitesse de croissance (V) aux points F, G, H, I, J, K, L et M.

F	G	H	I	J	K	L	M
$V = 0,25$	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

D'où la vitesse de croissance est maximale quand elle est égale à: 0,25.

Ainsi, l'intervalle d'âges demandé est: $[80; 95] = [E; G]$.

3. b. Est-il cohérent de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Si le diamètre vaut environ 70 cm: $x = 0,70$ mètre.

Dans ces conditions, l'âge correspondant est: $y = f(0,70) \Rightarrow y \approx 115$ ans.

Or quand l'âge est de 115 ans, la vitesse de croissance $V \in]0,24; 0,22[$.

Ainsi, il n'est pas rationnel de couper les arbres car, à ce moment-là, la vitesse de croissance n'est pas maximale.