

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons la limite de la fonction h en $+\infty$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$ (u x v)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}.$$

Or, d'après le cours: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Ainsi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$

Au total: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$

2. Étudions le sens de variation de la fonction h sur $[0; +\infty[$ et dressons son tableau de variations:

• Calculons h' :

Ici: $h(x) = \frac{x}{e^x}$

• $D_h = [0; +\infty[.$

Posons: $h = \frac{h_1}{h_2}$, avec: $h_1(x) = x$ et $h_2(x) = e^x.$

h_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

h_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Par conséquent, h est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$, avec: pour tout $x \in [0; +\infty[$, $h_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer h' pour tout $x \in [0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0; +\infty[: \quad h'(x) &= 1 \cdot x e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \quad (u' \cdot v + u \cdot v') \\ &\Rightarrow h'(x) = (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [0; +\infty[:$ $h'(x) = (1-x)e^{-x}$.

• Étudions le sens de variation de h' sur $[0; +\infty[$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; +\infty[$:

1^{er} cas: $h'(x) = 0$.

$h'(x) = 0$ ssi $x = 1$ (car sur $[0; +\infty[:$ $e^{-x} > 0$).

2^{ème} cas: $h'(x) < 0$.

$h'(x) < 0$ ssi $x > 1$ (car sur $[0; +\infty[:$ $e^{-x} > 0$).

3^{ème} cas: $h'(x) > 0$.

$h'(x) > 0$ ssi $x < 1$ (car sur $[0; +\infty[:$ $e^{-x} > 0$).

Au total: • h est croissante sur $[0; 1]$,

(car sur $[0; 1]$, $h'(x) \geq 0$)

• h est décroissante sur $[1; +\infty[$.

(car sur $[1; +\infty[$, $h'(x) \leq 0$)

• **Tableau de variation:**

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0	1	$+\infty$
h'	+	0	-
h			

Avec: • $a = h(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = h(1) \Rightarrow b = e^{-1}$,

• $c = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \Rightarrow c = 0$.

3. a. Vérifions que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $h(x) = e^{-x} - h'(x)$:

Nous savons que pour tout $x \in [0; +\infty[$:

• $h(x) = xe^{-x}$

• $h'(x) = (1-x)e^{-x}$.

Ainsi: $e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - (1-x)e^{-x}$

$$= xe^{-x}.$$

Au total, pour tout $x \in [0; +\infty[$, nous avons bien: $h(x) = e^{-x} - h'(x)$.

3. b. Déterminons une primitive de e^{-x} sur $[0; +\infty[$:

Une primitive de e^{-x} sur $[0; +\infty[$ est: $-e^{-x}$.

Ainsi, sur $[0; +\infty[$, e^{-x} admet comme primitive: $-e^{-x}$.

3. c. Déduisons-en une primitive de la fonction h sur $[0; +\infty[$:

h est continue sur $[0; +\infty[$, elle admet donc une primitive sur $[0; +\infty[$ cad une fonction H dérivable sur $[0; +\infty[$ avec: $H' = h$.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } H(x) &= \int h(x) dx \\ &= \int (e^{-x} - h'(x)) dx \\ &= \int e^{-x} dx - \int h'(x) dx \\ &= -e^{-x} - h(x). \end{aligned}$$

Et nous avons bien, pour tout $x \in [0; +\infty[$: $H'(x) = e^{-x} - h'(x)$.

Au total, sur $[0; +\infty[$, une primitive de h est:

$$H(x) = -e^{-x} - h(x) \text{ ou } H(x) = -(1+x)e^{-x}.$$

Partie B:

1. a. Déterminons la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donnons cette distance:

Nous savons que pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\bullet f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \iff f(x) = h(x) + \ln(x+1),$$

$$\bullet g(x) = \ln(x+1) \iff g(x) = f(x) - h(x).$$

La distance MN est maximale quand $f(x) - g(x)$ est maximale, ce qui revient à dire quand: $h(x)$ est maximale.

Or $h(x)$ est maximale quand: $x = 1$ (d'après 2.).

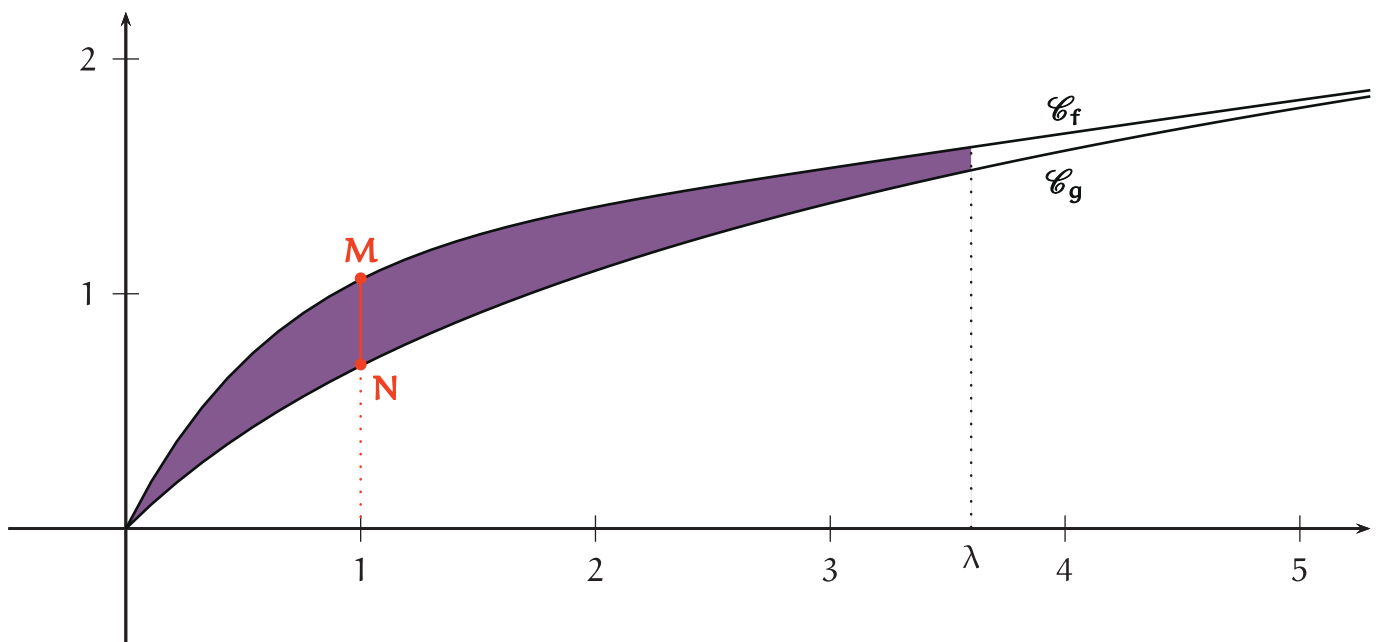
Au total:

- la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale est: $x = 1$,
- la distance maximale est: $h(1) = e^{-1}$.

1. b. Plaçons sur le graphique, les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN :

Nous pouvons représenter les points M et N demandés sur le graphique suivant:

Freemaths: Tous droits réservés



Notons que les coordonnées des points M et N sont respectivement:

$$M(1; f(1)) \text{ cad } M(1; e^{-1} + \ln(2)) \text{ et } N(1; g(1)) \text{ cad } N(1; \ln(2)).$$

2. a. Hachurons le domaine D_λ :

Fait sur graphique précédent.

2. b. Démontrons que $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \frac{(\lambda + 1)}{e^\lambda}$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire \mathcal{A}_λ du domaine délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$, est telle que:

$$\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{Or: } \mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x)) dx \iff \mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (h(x)) dx$$

$$\iff \mathcal{A}_\lambda = [H(x)]_0^\lambda \quad (\text{d'après 3.})$$

$$\iff \mathcal{A}_\lambda = [-(1+x)e^{-x}]_0^\lambda$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_\lambda = 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}.$$

Au total, nous avons bien: $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \frac{(1+\lambda)}{e^\lambda}$.

2. c. Calculons la limite de \mathcal{A}_λ en $+\infty$ et interprétons le résultat:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(1+\lambda)}{e^\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}.$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0 \quad (\text{d'après le cours}),$$

$$\bullet \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0 \quad (\text{d'après le Théorème des croissances comparées}).$$

D'où: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1.$

Au total: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = 1 \text{ u.a.}$

Cela signifie que quand λ tend vers l'infini (" λ " très grand), l'aire de la zone hachurée A_λ tendra vers 1 u.a.

3. a. Déterminons la valeur affichée (de λ) par l'algorithme quand $S = 0,8$:

A l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, nous trouvons:

- quand $\lambda = 2$, $A_2 < 0,8$ $\left(A_2 = 1 - \frac{3}{e^2} \right)$
- quand $\lambda = 3$, $A_3 \geq 0,8$ $\left(A_3 = 1 - \frac{4}{e^3} \right).$

Au total, la valeur affichée par l'algorithme quand $S = 0,8$ est: $\lambda = 3.$

3. b. Déterminons le rôle de cet algorithme:

Le rôle de cet algorithme est d'afficher la première valeur entière de λ pour laquelle $A_\lambda \geq S.$