

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$:

Ici: • $f(x) = bx + 2 \ln(1 - x)$, avec: $b \geq 2$

• $Df = [0; 1[$

$$\bullet f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}$$

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 1[$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -bx + b - 2 = 0, \text{ cad: } x = \frac{b-2}{b}, \text{ car: } 1-x \neq 0 \text{ sur } [0; 1[.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } -bx + b - 2 < 0, \text{ cad: } x > \frac{b-2}{b}, \text{ car: } 1-x \neq 0 \text{ sur } [0; 1[.$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } -bx + b - 2 > 0, \text{ cad: } x < \frac{b-2}{b}, \text{ car: } 1-x \neq 0 \text{ sur } [0; 1[.$$

Ainsi: • f est croissante sur $\left[0; \frac{b-2}{b}\right]$,

(car sur $\left[0; \frac{b-2}{b}\right]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\frac{b-2}{b}; 1[$.

(car sur $[\frac{b-2}{b}; 1]$, $f'(x) \leq 0$)

Dans ces conditions, le tableau de variations de f est le suivant:

x	0	$\frac{b-2}{b}$	1
f'	+	0	-
f	a'	b'	c'

Avec: • $a' = f(0) \Rightarrow a' = 0$,

• $b' = f\left(\frac{b-2}{b}\right) \Rightarrow b' = b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$,

• $c' = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Au total, nous pouvons dire que la fonction f admet un maximum quand:

$$x = \frac{b-2}{b}.$$

Soit M ce maximum, les coordonnées de M sont:

• $x_M = \frac{b-2}{b}$

• $y_M = f(x_M) = b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminons pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètres:

D'après la question précédente, la hauteur maximale du projectile nous est donnée par: $H(b) = b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right)$, avec: $b \geq 2$.

Or, on cherche les valeurs du paramètre b telles que:

$H(b) \leq 1,6$ mètres **cad**: $b - 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{b}\right) \leq 1,6$, avec: $b \in [2; +\infty[$.

Notons que la fonction H est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ car sur

cet intervalle: $H'(b) = 1 - \frac{2}{b} > 0$.

En procédant par tâtonnement et à l'aide d'une machine à calculer, on trouve que quand: $b \in [2; 5,69[$, $H(b) \leq 1,6$ mètres.

Ainsi, la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètres quand les valeurs du paramètre b sont telles que: $2 \leq b < 5,69$.

3. Déterminons une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ :

- L'équation de la tangente T à la courbe de la fonction f au point d'abscisse $x = 0$ est: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\Leftrightarrow y = (b - 2)x + 0, \text{ car: } f'(0) = b - 2 \text{ et } f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = (5,69 - 2)x, \text{ car: } b = 5,69$$

$$\Leftrightarrow y = 3,69x.$$

- Sachant que $b = 5,69$, soient les 3 points suivants:

- $O(0; 0)$,
 - $C(1; 0)$, C est situé sur l'axe des abscisses,
 - $D(1; 3,69)$, D appartient à la tangente T .
- En reliant les points O , C et D , nous obtenons un triangle rectangle en C :
le triangle OCD .

Dans ces conditions l'angle θ est tel que: $\tan(\theta) = \frac{CD}{OC}$.

Or, $\frac{CD}{OC} = \frac{3,69}{1}$ et donc θ est tel que: $\tan \theta = 3,69$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\theta \approx 74,8368$ degrés.

En conclusion une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ est:

74,8.