# Maths Complémentaires Terminale

## « ln » : Études de fonctions

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION

On considère la suite $(I_n)$ définie par $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel $n$ non nul $I_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x$.

**1.** Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

**2.** **a.** Calculer $I_0 - I_1$.
**b.** En déduire $I_1$.

**3.** **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ .
**b.** Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel $n$ donné, la valeur de $I_n$ .

**4.** Soit $n$ un entier naturel non nul.
On admet que si $x$ appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .
**a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
**b.** En déduire la limite de la suite $(I_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ .

**5.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
**a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
**b.** Déterminer la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.