

www.freemaths.fr

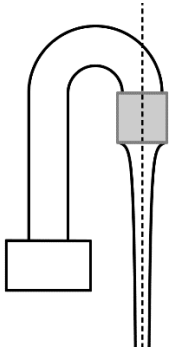
# Maths Complémentaires Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION



L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.

On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe** par la courbe  $C$  dans un repère orthonormé.

## Partie A

On considère que la courbe  $C$  donnée en **annexe** est la représentation graphique d'une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \quad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction  $f$  peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?
2. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  par  $g(x) = k \ln x$ .
  - a. Déterminer le réel  $k$  pour que la fonction  $g$  respecte les trois conditions (H).
  - b. La courbe représentative de la fonction  $g$  coïncide-t-elle avec la courbe  $C$  ? Pourquoi ?
3. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  par  $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$  où  $a$  et  $b$  sont des réels. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $h$  respecte les trois conditions (H).

## Partie B

On admet dans cette partie que la courbe  $C$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20} \left( x - \frac{1}{x^4} \right).$$

1. Justifier que l'équation  $f(x) = -5$  admet sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  une unique solution qui sera notée  $\alpha$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
2. On admet que le volume d'eau en  $\text{cm}^3$ , contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule :  $V = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 f'(x) dx$ .
  - a. Soit  $u$  la fonction dérivable sur  $]0 ; 1]$  définie par  $u(x) = \frac{1}{2x^2}$ . Déterminer sa fonction dérivée.
  - b. Déterminer la valeur exacte de  $V$ . En utilisant la valeur approchée de  $\alpha$  obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de  $V$ .

# ANNEXE

