

www.freemaths.fr

# Maths

## Complémentaires

### Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION

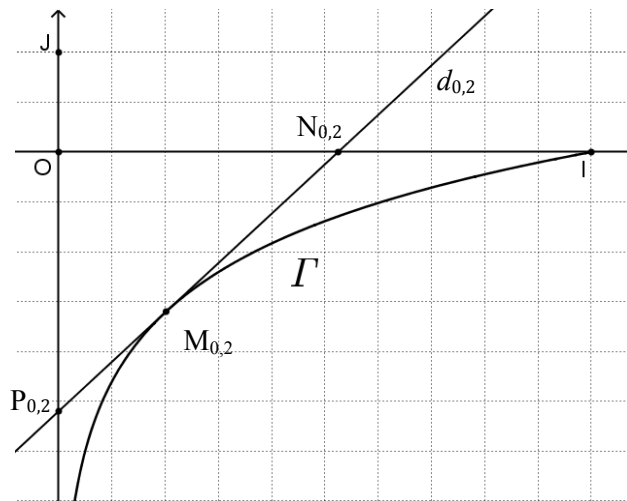
Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

1. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  par  $f(x) = x(1 - \ln x)^2$ .
  - a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de  $f$  et vérifier que pour tout  $x \in ]0 ; 1]$ ,  $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$ .
  - b. Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  (on admettra que la limite de la fonction  $f$  en 0 est nulle).

On note  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0 ; 1]$  par  $g(x) = \ln x$ . Soit  $a$  un réel de l'intervalle  $]0 ; 1]$ . On note  $M_a$  le point de la courbe  $\Gamma$  d'abscisse  $a$  et  $d_a$  la tangente à la courbe  $\Gamma$  au point  $M_a$ . Cette droite  $d_a$  coupe l'axe des abscisses au point  $N_a$ , et l'axe des ordonnées au point  $P_a$ .

On s'intéresse à l'aire du triangle  $ON_aP_a$  quand le réel  $a$  varie dans l'intervalle  $]0 ; 1]$ .

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où  $a = 0,2$  et on donne la figure ci-dessous.



- a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$  en unités d'aire.
- b. Déterminer une équation de la tangente  $d_{0,2}$ .
- c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle  $ON_{0,2}P_{0,2}$ .

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel  $a$  de l'intervalle  $]0 ; 1]$ , l'aire du triangle  $ON_aP_a$  en unités d'aire est donnée par  $A(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$ .

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de  $a$  l'aire  $A(a)$  est maximale. Déterminer cette aire maximale.