

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

« **ln** » : Études de fonctions



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a). Calculons f' sur l'intervalle $]0; 1[$:

Ici: • $f(x) = x(1 - \ln x)^2$ $(u \times (v)^2)$

• $Df =]0; 1[$.

Posons: $f = f_1 \times (f_2 + f_3)^2$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$ et $f_3(x) = -\ln x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0; 1[$.

f_3 est dérivable sur $]0; +\infty[$ [comme fonction "ln", donc dérivable sur l'intervalle $]0; 1[$.

Dans ces conditions, la fonction $f_2 + f_3$ est dérivable sur $]0; 1[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; 1[$.

De même, la fonction $h(x) = (f_2 + f_3)^2$ est dérivable sur $]0; 1[$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $]0; 1[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]0; 1[$ comme produit $(f, \times h)$ de deux fonctions dérivables sur $]0; 1[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; 1[$.

Pour tout $x \in]0; 1[$: $f'(x) = (1) \times (1 - \ln x)^2 + (x) \times (2) \times (1 - \ln x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)$

$(u' \times (v)^2 + u \times 2 \times (v)' \times v')$

$((w^n)' = n(w^{n-1}) \times w')$

cad: $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x)$.

Au total, pour tout $x \in]0; 1]$: $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x)$.

1. a2. Factorisons f' sur $]0; 1]$:

Pour tout $x \in]0; 1]$: $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x)$

$$= (1 - \ln x) \times (1 - \ln x) - 2 + 2 \ln x$$

$$= 1 - \ln x - \ln x + (\ln x)^2 - 2 + 2 \ln x$$

$$= (\ln x)^2 - 1$$

$$= (\ln x + 1)(\ln x - 1) \quad (a^2 - b^2) = (a + b)(a - b).$$

Au total, pour tout $x \in]0; 1]$, nous avons bien: $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

1. b. Etudions les variations de f et dressons le tableau de variations sur l'intervalle $]0; 1]$:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]0; 1]$, sachant que:

$$\ln x - 1 < 0 \text{ sur }]0; 1].$$

• **1^{er} cas:** $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } \ln x + 1 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \leq e^{-1} \text{ ou: } x \in]0; e^{-1}].$$

• **2^{ème} cas:** $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } \ln x + 1 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \geq e^{-1} \text{ ou: } x \in [e^{-1}; 1].$$

Au total: • f est croissante sur $]0; e^{-1}]$,

• f est décroissante sur $[e^{-1}; 1]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0	e^{-1}	1
f'		+	-
f	a	b	c

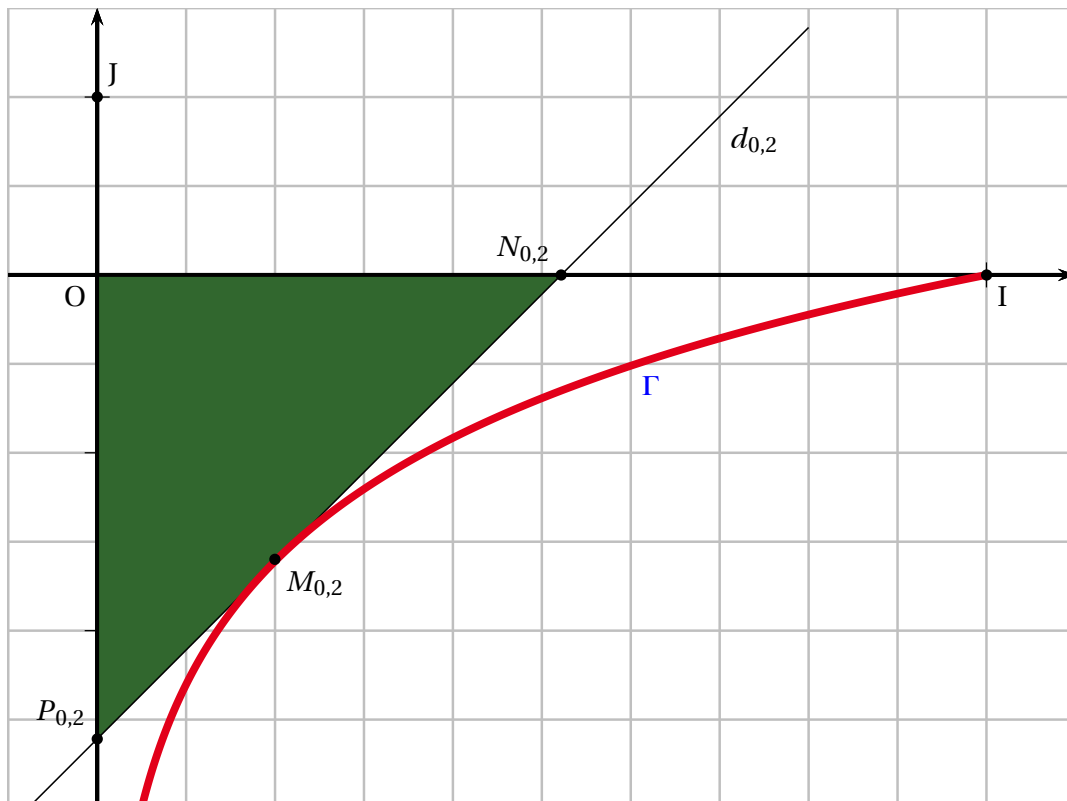
Avec: • $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, (d'après l'énoncé)

• $b = f(e^{-1}) = 4e^{-1}$,

• $c = f(1) = 1$.

2. a. Déterminons graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire:

L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ correspond à la zone verte du graphique suivant:



Approximativement, cette zone verte correspond à la moitié du rectangle ayant pour côtés: $ON_{0,2}$ et $OP_{0,2}$.

- Or:
- $ON_{0,2} \approx 0,5$, (5 carreaux avec: $OI = 10$ carreaux)
 - $OP_{0,2} \approx 2,5$. (5 carreaux avec: $OJ = 2$ carreaux)

Dans ces conditions une estimation de l'aire \mathcal{A} du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est:

$$\mathcal{A} \approx \frac{0,5 \times 2,5}{2} \quad \text{cad: } \mathcal{A} \approx 0,625 \text{ u.a.}$$

Au total, graphiquement une estimation de l'aire demandée est: $\mathcal{A} \approx 0,625 \text{ u.a.}$

2. b. Déterminons une équation de la tangente $d_{0,2}$:

L'équation réduite de la tangente $d_{0,2}$ au point $M(0,2; \ln(0,2))$ s'écrit:

$$\begin{aligned} y &= g'(x_M)(x - x_M) + g(x_M) \\ &= g'(0,2)(x - 0,2) + \ln(0,2). \end{aligned}$$

Or ici: • $g(x) = \ln x$,

• $g'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in]0; 1]$,

• $g'(0,2) = 5$.

Dans ces conditions: $y = 5x(x - 0,2) + \ln(0,2)$

cad: $y = 5x + (-1 + \ln(0,2))$.

Au total, une équation de la tangente $d_{0,2}$ est: $y = 5x + (-1 + \ln(0,2))$.

2. c. Calculons la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$:

Nous savons que la tangente $d_{0,2}$ passe par les points $N_{0,2}$ et $P_{0,2}$.

Sachant que son équation est: $y_d = 5x_d + (-1 + \ln(0,2))$, les points $N_{0,2}$ et $P_{0,2}$ ont pour coordonnées respectives: $N_{0,2}(x_{dN}; 0)$ et $P_{0,2}(0; y_{dP})$.

Déterminons x_{dN} et y_{dP} :

• x_{dN} est tel que: $0 = 5x_{dN} + (-1 + \ln(0,2))$ cad: $x_{dN} = \frac{1 - \ln(0,2)}{5} > 0$.

• y_{dP} est tel que: $y_{dP} = 5 \times 0 + (-1 + \ln(0,2))$ cad: $y_{dP} = -1 + \ln(0,2) < 0$.

Dans ces conditions, l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1 - \ln(0,2)}{5}\right) \times (1 - \ln(0,2)) \quad (\text{car: } |-1 + \ln(0,2)| = 1 - \ln(0,2)) \\ &\approx \frac{1}{10} \times 6,81 \end{aligned}$$

cad: $\mathcal{A} \approx 0,681 \text{ u.a.}$

Au total, la valeur exacte du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est d'environ: $\mathcal{A} \approx 0,681 \text{ u.a.}$

3. a. Déterminons pour quelle valeur de "a" l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale:

Ici: $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2} a (1 - \ln a)^2$.

Cette aire est maximale quand: $\mathcal{A}'(a) = 0$.

$$\mathcal{A}'(a) = 0 \iff \frac{1}{2} \times (1) \times (1 - \ln a)^2 + \left(\frac{1}{2} a\right) \times (2) \times (1 - \ln a)' \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln a)^2 - 2(1 - \ln a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \ln a) = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = e^{-1}.$$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale quand: $a = e^{-1}$.

3. b. Déterminons cette aire maximale:

Cette aire maximale notée \mathcal{A}_{\max} est:

$$\mathcal{A}_{\max} = \frac{1}{2} \times (e^{-1}) \times (1 - \ln(e^{-1}))^2$$

$$= 2e^{-1} \text{ u.a.}$$

Au total, cette aire maximale est: $\mathcal{A}_{\max} = 2e^{-1} \text{ u.a.}$