Maths
Complémentaires
Terminale

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE 3

CORRECTION

Calculons la limite de f en $+\infty$:

Ici: $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x$, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x$$

$$= (+\infty) - (+\infty).$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours **à la technique de la quantité conjuguée** pour contourner cette **indétermination**.

$$f(x) = (x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x \iff f(x) = \frac{[(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} - x] \times [(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} + x]}{[(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} + x]}$$

$$\iff f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^2}{(x^3 + x^2 + 1)^{1/2} + x}$$

$$\iff f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} + x}.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 1}{\left(x^{3/2}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}}\right) + x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^{3/2} + x} \quad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^{3/2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{3/2}$$

$$= +\infty.$$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$