Maths Complémentaires Terminale

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LIMITES FINIES EN $+\infty$ ET $-\infty$

4

CORRECTION

1. a. Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{5-2x}{2x-3}$, pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-2x}{2x-3}.$$

Or:

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5-2x = \lim_{x\to+\infty} x\left(-2+\frac{5}{x}\right)$ $(x \neq 0)$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x-3 = \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{3}{x}\right)$ $(x \neq 0)$.

Et:

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0^+$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0^-$.

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-2+0^+)}{x(2+0^-)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x}$$

$$= -1.$$

1\. b. Étudions la limite en $-\infty$ de la fonction f :

Ici : $f(x) = \dfrac{5-2x}{2x-3}$, pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5-2x}{2x-3}.$$

Or : • $\lim\limits_{x \to -\infty} 5 - 2x = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(-2 + \dfrac{5}{x}\right)$ $(x \neq 0)$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(2 - \dfrac{3}{x}\right)$ $(x \neq 0)$.

Et : • $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x} = 0^-$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{x} = 0^+$.

Dans ces conditions : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x(-2+0^-)}{x(2+0^+)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{2x}$$

$$= -1.$$

2. Concluons:

- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = -1$.

- Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = -1$.