Maths Complémentaires Terminale

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LIMITES FINIES EN $+\infty$ ET $-\infty$

3

CORRECTION

1. a. Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{18x^4 - 18x^2 + 6}{9x^4 + 3}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{18x^4 - 18x^2 + 6}{9x^4 + 3}.$$

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} 18x^4 - 18x^2 + 6 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(18 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{6}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 9x^4 + 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(9 + \dfrac{3}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$.

Et: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-18}{x^2} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^4} = 0^+$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^4} = 0^+$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 (18 + 0^- + 0^+)}{x^4 (9 + 0^+)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{18x^4}{9x^4}$$

$$= 2.$$

1. b. Étudions la limite en $-\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{18x^4 - 18x^2 + 6}{9x^4 + 3}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{18x^4 - 18x^2 + 6}{9x^4 + 3}.$$

Or: • $\lim\limits_{x \to -\infty} 18x^4 - 18x^2 + 6 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4\left(18 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{6}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} 9x^4 + 3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4\left(9 + \dfrac{3}{x^4}\right)$ $(x \neq 0)$.

Et: • $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-18}{x^2} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6}{x^4} = 0^+$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^4} = 0^+$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4(18 + 0^- + 0^+)}{x^4(9 + 0^+)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{18x^4}{9x^4}$$

$$= 2.$$

2. Concluons:

- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 2$.

- Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 2$.