Maths Complémentaires Terminale

Limites avec « ln »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE LIMITES 7

CORRECTION

1. Étudions la limite de f quand x tend vers $+\infty$:

Ici: $f(x) = \ln(2x - 1) - x + 1$.

• $\mathcal{D}f = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ $(2x - 1 > 0)$.

• $f(x) = \ln(2x - 1) - x + 1 \iff f(x) = \ln\left[x\left(2 - \frac{1}{x}\right)\right] - x + 1$

$\iff f(x) = \ln(x) + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) - x + 1$

$\iff f(x) = x\left[\frac{\ln(x)}{x} - 1\right] + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) + 1.$

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, d'après le cours

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times [0 - 1] + \ln(2) + 1 = -\infty.$

2. Étudions la limite de f quand x tend vers 0^+:

Ici: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} + 4x - 7.$

• $\mathcal{D}f =]-1; 0[\cup]0; +\infty[.$ $(1 + x > 0$ et $x \neq 0)$

• $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) + 4x - 7.$

Or: • $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, d'après le cours

• $\lim\limits_{x \to 0^+} 4x - 7 = -7.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - 7 = -6.$

3. Étudions la limite de f quand x tend vers $+\infty$:

Ici: $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x-3})}{x}.$

• $\mathcal{D}f =]3; +\infty[.$ $(x - 3 > 0$ et $x \neq 0)$

• $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x-3})}{x} \iff f(x) = \dfrac{\ln(x-3)^{1/2}}{x}$

$\iff f(x) = \dfrac{1}{2x} \ln(x-3)$

$\iff f(x) = \dfrac{1}{2x}\left(\ln\left[x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)\right]\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2x}\left(\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x}\right].$$

Or:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, d'après le cours
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{x} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \times [0 + 0] = 0.$