Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 9

CORRECTION

Partie A:

1. Justifions le fait que a = 1:

Ici: • $f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

• $Df = [\,0\,; +\infty\,[$,

• la courbe Cf passe par le point A (0 ; 0, 5),

• la tangente à la courbe Cf au point A passe par B (10 ; 1).

Comme Cf passe par le point A, nous pouvons écrire: $f(0) = 0,5$.

$f(0) = 0,5 \iff \frac{a}{1 + e^{-b\times 0}} = 0,5 \iff \frac{a}{2} = 0,5$ **cad:** $a = 1$.

Au total, nous avons bien: $a = 1$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$.

$\left(\frac{u}{v}\right)$

2. Calculons f' sur l'intervalle $[\,0\,; +\infty\,[$:

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$:

$$f'(x) = \frac{0 \times (1 + e^{-bx}) - 1 \times (-b\, e^{-bx})}{(1 + e^{-bx})^2} \qquad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{b\, e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{b\, e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$

3. Déterminons b:

D'après l'énoncé, nous savons que la tangente à la courbe C_f, au point A, passe par le point B.

Soit $y = cx + b$, l'équation de cette tangente.

" $c = f'(x_A)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff \frac{1 - (0,5)}{10 - 0} \quad \text{cad:} \quad c = 0,05.$$

Or: $f'(x_A) = f'(0)$

$$= \frac{b}{4}.$$

En égalisant, nous obtenons: $c = f'(x_A) \iff 0,05 = \dfrac{b}{4}$ cad: $b = 0,2$.

Au total: $b = 0,2$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-0,2x}}.$

Partie B:

1. Déterminons la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010:

Il s'agit ici de calculer: $p(10)$.

Or: • $p(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-0,2x}}$

• $Dp = [\,0\,; +\infty\,[$.

Dans ces conditions: $p(10) = \dfrac{1}{1 + e^{-2}}$ **cad**: $p(10) \approx 0,88$.

Au total, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 sera donc de: 88%.

2. a. Déterminons le sens de variation de la fonction p sur $[\,0\,; +\infty\,[$:

Grâce à la **PARTIE A**, nous savons que la fonction p est dérivable sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

$$(p(x) = f(x) \text{ avec: } a = 1 \text{ et } b = 0,2)$$

Nous savons aussi que sa dérivée sur $[\,0\,; +\infty\,[$ est: $p'(x) = \dfrac{0,2\, e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2}$

$$\left(f'(x) = \frac{b\, e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}\right).$$

De plus, pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: • $0,2\, e^{-0,2x} > 0$

• $(1 + e^{-0,2x})^2 > 0$.

Ainsi, sur $[\,0\,; +\infty\,[$: $p'(x) > 0$.

Et donc: p est strictement croissante sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

2. b. Calculons la limite de la fonction p en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

$$= 1, \text{ car: } \lim_{x \to +\infty} e^{-0,2x} = 0.$$

Ainsi, la limite de la fonction p en $+\infty$ est égale à: 1.

2. c. Interprétons ce résultat:

Cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre d'années, 100% des individus seront équipés.

3. Déterminons l'année demandée:

Le marché est saturé quand la proportion d'individus équipés dépasse 95%.

Ainsi, le marché est saturé quand: $p(x) \geqslant 0,95$.

$$p(x) \geqslant 0,95 \iff \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} \geqslant 0,95$$

$$\iff 1 \geqslant 0,95 + 0,95\, e^{-0,2x}$$

$$\iff e^{-0,2x} \leqslant \frac{1}{19}$$

$$\iff \ln\left(e^{-0,2x}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$\iff -0,2x \leqslant -\ln(19)$$

$$\iff x \geqslant \frac{\ln(19)}{0,2} \text{ cad: } x \geqslant 14,72.$$

Ainsi, le marché sera saturé au cours de l'année: 15.

Soit: en 2015.

4. a. Vérifions, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'égalité demandée:

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, nous savons que: $p(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}$ **(1)**.

En multipliant, numérateur et dénominateur de **(1)** par " $e^{0,2x}$ ", nous obtenons:

$$p(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-0,2x}}\right) \times \left(\frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}}\right)$$

$$= \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}+e^{0}} \quad \text{cad:} \quad p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}.$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons bien: $p(x) = \dfrac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$.

4. b. Déduisons-en une primitive de la fonction p sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

$p(x) = \dfrac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Ça sent le: $\dfrac{u'}{u}$!

Or si $u = 1 + e^{0,2x}$, $u' = 0,2\,e^{0,2x}$.

D'où un " **0, 2** " en trop. Problème qui peut être éliminé en multipliant par " **5** ".

Ainsi, une primitive de la fonction p sur $[\,0\,;+\infty\,[$ est: $P(x) = 5\ln(u)$

cad: $P(x) = 5\ln(1+e^{0,2x})$.

Au total, une primitive de p sur $[\,0\,;+\infty\,[$ est: $P(x) = 5\ln(1+e^{0,2x})$.

4. c. Déterminons la valeur exacte de " m " et son arrondi au centième:

La proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 est:

$$m = \frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,dx.$$

D'où: $m = \frac{1}{2} [5 \ln (1 + e^{0,2x})]_8^{10}$

cad: $m = \frac{5}{2} (\ln (1 + e^{2}) - \ln (1 + e^{1,6}))$

ou: $m \approx 0,86$.

Au total: • la valeur exacte de " m " est: $\frac{5}{2} (\ln (1 + e^{2}) - \ln (1 + e^{1,6}))$,

• la valeur approchée de " m " est: **0, 86**.