Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 60

CORRECTION

Partie A:

1. Étudions le sens de variation de f sur $[0;1]$:

• **Calculons f':**

Ici: • $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1-x}}$

• $Df = [0;1]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_1 + f_2}$, avec: $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = e^{1-x}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0;1]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;1]$.

Par conséquent, $h = f_1 + f_2$ est dérivable sur $[0;1]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;1]$.

Dans ces conditions, f est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{h}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;1]$, avec: pour tout $x \in [0;1]$, $h(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;1]$.

Pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) = \dfrac{0 \times (1 + e^{1-x}) - 1 \times (-e^{1-x})}{(1 + e^{1-x})^2}$ => $f'(x) = \dfrac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2}$.

Au total: pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \dfrac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$.

• **Étudions le signe de f' sur $[0;1]$:**

Pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) > 0$.

Ainsi: pour tout $x \in [0;1]$, f est strictement croissante.

• **Dressons le tableau de variation de f sur $[0;1]$:**

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	1
f'	$+$	
f	a ↗	b

Avec: • $a = f(0)$ => $a = \dfrac{1}{1+e}$,

• $b = f(1)$ => $b = 1$.

2. Montrons que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+e}$:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}} \iff f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \left(\frac{1}{1+e^{1-x}}\right)$$

$$\iff f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^x \times e^{1-x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}.$$

Au total, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons bien: $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+e}$.

3. Montrons que $\int_0^1 f(x)dx = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 f(x)dx.$

f est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{1-x}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)}dx, \quad \text{avec:} \quad U(x) = e^x + e$$

$$= [\ln |U(x)|]_0^1$$

$$= [\ln |e^x + e|]_0^1$$

$$= [\ln(e^x + e)]_0^1, \quad \text{car sur } [0;1]: \quad e^x + e > 0$$

$$= \ln(2e) - \ln(1+e)$$

$$\Rightarrow \quad I = \ln(2) + \ln(e) - \ln(1+e).$$

Au total, nous avons bien: $I = \ln(2) + 1 - \ln(1+e).$

Partie B:

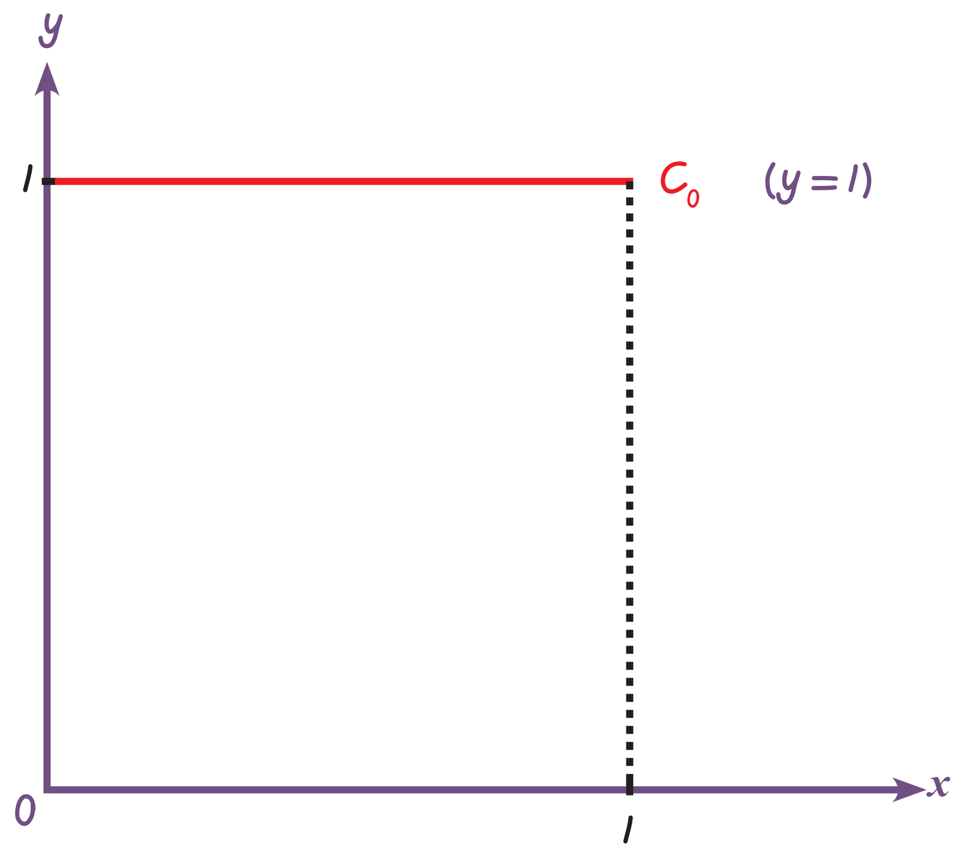
1. Courbe représentative C_0 de la fonction f_0:

Soit $n = 0$; la fonction f_0 définie sur $[0,1]$ est:

$$f_0(x) = \frac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} \quad \Rightarrow \quad f_0(x) = 1.$$

La courbe représentative C_0 a donc pour équation: $y = 1 \;\; (x \in [0,1])$.

D'où le graphique suivant:



2. Interprétons graphiquement U_n et calculons U_0:

• D'après l'énoncé, nous avons:

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx, \quad \text{avec:} \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}.$$

Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier naturel n: $ne^{1-x} > 0$.

Dans ces conditions: $\dfrac{1}{1 + ne^{1-x}} > 0 \iff f_n(x) > 0$.

Ainsi: U_n représente l'aire sous la courbe C_n délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation: $x = 0$ et $x = 1$.

• $U_0 = \int_0^1 f_0(x)\,dx \iff U_0 = \int_0^1 \dfrac{1}{1+0}\,dx$

$$\Longleftrightarrow \quad U_0 = \int_0^1 dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad U_0 = [\, x \,]_0^1$$

$$\Longrightarrow \quad U_0 = 1.$$

Au total: $\int_0^1 f_0(x)\,dx = 1.$

3. Déterminons la conjecture quant au sens de variation de la suite (U_n) et démontrons là:

- La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la suite (U_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est strictement décroissante ".

De plus, (U_n) est positive et semble converger vers " 0 " (minorant).

- (U_n) strictement décroissante ?

Il s'agit de déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 + (n+1)e^{1-x}}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + ne^{1-x}}$.

Notons: • les fonctions f_{n+1} et f_n sont continues sur $[0,1]$;

• elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$, et par conséquent:

(a) $$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx \text{ existent ;}$$

• de plus, les fonctions f_{n+1} et f_n sont positives sur $[0,1]$;

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,1]$, nous avons:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(1 + ne^{1-x}) - (1 + (n+1)e^{1-x})}{\underbrace{(1 + (n+1)e^{1-x})(1 + ne^{1-x})}_{= D}}$$

$$= \frac{-e^{1-x}}{D} < 0.$$

Donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ car $D > 0$ et $-e^{1-x} < 0$.

Par ailleurs, comme les conditions (a) sont toutes réunies, nous pouvons écrire:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

$$\iff \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx < \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < U_n.$$

Comme $U_{n+1} < U_n$, (U_n) est bien une suite strictement décroissante.

4. Déterminons la limite de la suite (U_n):

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici: • (U_n) est minorée par $m = 0$, $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx > 0\right)$

• (U_n) est décroissante, pour tout entier naturel n.

Donc nous pouvons affirmer que (U_n) est convergente.

Et par conséquent, la suite (U_n) admet une limite finie.