

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# FONCTION

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

## Partie A

Pour un nombre entier naturel  $n$ , on note  $T_n$  la température en degré Celsius du four au bout de  $n$  heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc  $T_0 = 1\,000$ .

La température  $T_n$  est calculée par l'algorithme suivant :

$T \leftarrow 1000$
Pour $i$ allant de 1 à $n$
$T \leftarrow 0,82 \times T + 3,6$
Fin Pour

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ .
3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

## Partie B

Dans cette partie, on note  $t$  le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en degré Celsius) à l'instant  $t$  est donnée par la fonction  $f$  définie,

pour tout nombre réel  $t$  positif, par :  $f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

On admet que  $f$  vérifie la relation suivante :  $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$ .

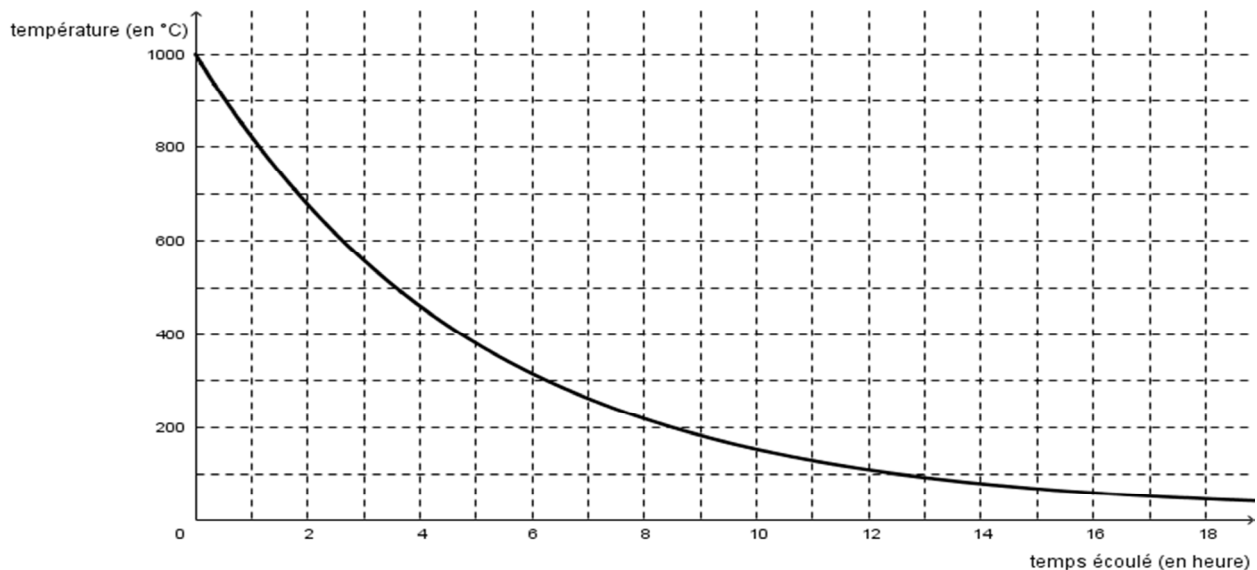
1. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que  $f(0) = 1\,000$ .

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif  $t$  :  $f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20$ .
- Déterminer la limite de  $f$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
  - Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . En déduire son tableau de variations complet.
  - Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est donnée

$$\text{par : } \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

- À l'aide de la représentation graphique de  $f$  ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne  $\theta$  du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.



- Calculer la valeur exacte de cette température moyenne  $\theta$  et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.
4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants  $t$  et  $(t+1)$ . Cet abaissement est donné par la fonction  $d$  définie, pour tout nombre réel  $t$  positif, par :  $d(t) = f(t) - f(t+1)$ .

- Vérifier que, pour tout nombre réel  $t$  positif :  $d(t) = 980 \left( 1 - e^{-\frac{1}{5}} \right) e^{-\frac{t}{5}}$ .

- Déterminer la limite de  $d(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .  
Quelle interprétation peut-on en donner ?