Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 52

CORRECTION

Partie A: Modélisation discrète

1. Déterminons la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement:

Déterminer la température du four au bout de 4 heures de refroidissement revient à calculer T_4.

Or: • $T_0 = 1000$ degrés,

• $T_1 = 0,82 \times 1000 + 3,6 \iff T_1 = 823,6$ degrés,

• $T_2 = 0,82 \times 823,6 + 3,6 \iff T_2 = 678,952$ degrés,

• $T_3 = 0,82 \times 678,952 + 3,6 \iff T_3 = 560,34064$ degrés,

• $T_4 = 0,82 \times 560,34064 + 3,6 \iff T_4 = 463$ degrés, arrondie à l'unité.

Au total, la température du four au bout de 4 heures de refroidissement est de: 463 degrés Celsius.

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ ".

Initialisation: • $T_0 = 980 \times (0,82)^0 + 20$ **cad**: $T_0 = 1000$.

Or, d'après l'énoncé: $T_0 = 1000$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$
et montrons qu'alors $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.

Supposons: $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) $\Rightarrow$ $0,82 \times T_n = 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20)$

$\Rightarrow$ $0,82 \times T_n + 3,6 = 0,82 \times (980 \times 0,82^n + 20) + 3,6$

$\Rightarrow$ $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + (0,82 \times 20 + 3,6)$

$\Rightarrow$ $T_{n+1} = 980 \times 0,82^{n+1} + 20$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$T_n = 980 \times 0,82^n + 20.$$

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque ?

D'après l'énoncé, la porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 degrés Celsius.

Dans ces conditions, pour répondre à la question, nous devons résoudre l'inéquation: $T_n \leqslant 70$.

$T_n \leqslant 70 \iff 980 \times (0,82)^n + 20 \leqslant 70$

$\iff (0,82)^n \leqslant \dfrac{5}{98}$

$\iff n \ln(0,82) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{98}\right)$

$<=> \; n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{98}\right)}{\ln(0,82)}$, car: $0,82 \in]0;1[$, et donc: $\ln(0,82) < 0$

$=> \; n \geqslant 15$ heures, car n est un entier naturel.

Au total: au bout de **15 heures**, le four peut être ouvert sans aucun risque.

Partie B: Modélisation continue

1. Déterminons les valeurs de a et b:

D'après l'énoncé, sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

- $f(t) = a\,e^{-\frac{t}{5}} + b$
- $f'(t) = 4 - \dfrac{1}{5}\,f(t)$
- $f(0) = 1000$.

• Détermination de " a ":

$f(t) = a\,e^{-\frac{t}{5}} + b$, d'où: $f'(t) = -\dfrac{a}{5}\,e^{-\frac{t}{5}}$.

Dans ces conditions: $f'(0) = -\dfrac{a}{5}\,e^{-0}$ cad: $f'(0) = -\dfrac{a}{5}$.

Or, nous avons aussi: $f'(0) = 4 - \dfrac{1}{5}\,f(0)$ cad: $f'(0) = 4 - \dfrac{1}{5}(1000) = -196$.

En égalisant, nous obtenons: $-\dfrac{a}{5} = -196$ **cad**: $\boldsymbol{a = 980}$.

• Détermination de " b ":

$f(0) = 1000 \;<=>\; a\,e^{-0} + b = 1000$ cad: $a + b = 1000 \quad (1)$.

Comme $\boldsymbol{a = 980}$, $(1) \;<=>\; 980 + b = 1000$ **cad**: $\boldsymbol{b = 20}$.

Au total: $a = 980$ et $b = 20$.

Et nous pouvons écrire: $f(t) = 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. a. Déterminons la limite de la fonction f quand t tend vers $+\infty$:

Ici, il s'agit de calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

Or, d'après le cours: $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{e^{\frac{t}{5}}}$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X}$, en posant: $X = \dfrac{t}{5}$

$= 0$.

Ainsi: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} (980 \times 0 + 20)$

$= 20$.

Au total: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$.

2. b. Etudions le sens de variation de la fonction f sur $[\, 0 ; +\infty\, [$ et dressons le tableau de variations:

Sur $[\, 0 ; +\infty\, [$, nous savons que: $f'(t) = 4 - \dfrac{1}{5}\left(980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20\right)$.

Ainsi, pour tout $t \in [\, 0 ; +\infty\, [$: $f'(t) = -196\, e^{-\frac{t}{5}} < 0$.

Comme, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $f'(t) < 0$, nous pouvons affirmer que:

la fonction f est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, le tableau de variations de f est le suivant:

t	0	$+\infty$
f'	-	
f	c ↘	d

Avec: • $c = f(0) \Rightarrow c = 1000$,

• $d = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \Rightarrow d = 20$.

2. c. Déterminons après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans aucun risque:

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre l'inéquation: $f(t) \leqslant 70$.

(comme Partie A, question 3.)

$$f(t) \leqslant 70 \iff 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leqslant 70$$

$$\iff e^{-\frac{t}{5}} \leqslant \frac{5}{98}$$

$$\iff \ln\left(e^{-\frac{t}{5}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

$$\iff -\frac{t}{5} \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

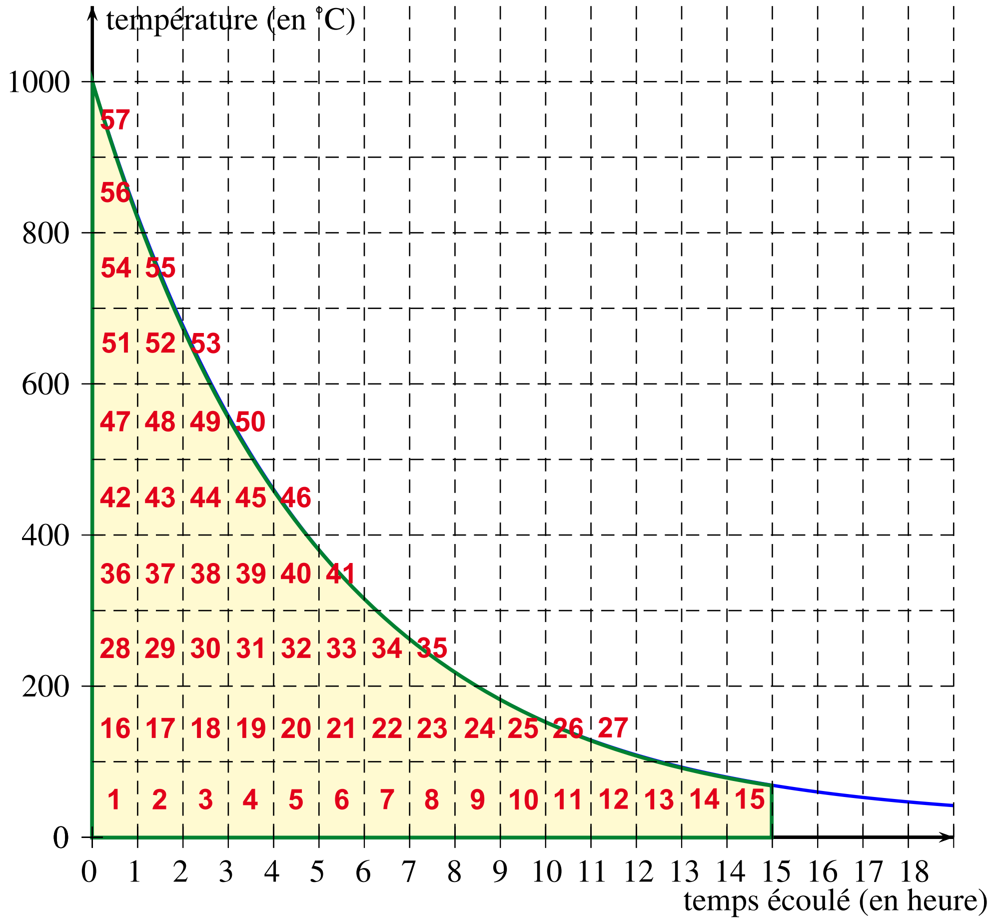
$$\iff t \geqslant -5\ln\left(\frac{5}{98}\right)$$

<=> $t \geqslant 14,878$ heures **ou**: $t \geqslant$ **893 minutes**.

Au total: au bout de **893 minutes**, le four peut être ouvert sans aucun risque.

3. a. Donnons une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement (à l'aide du graphique):

Soit le graphique suivant:



En comptant le nombre de rectangles complets, nous obtenons un total de:

$13 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 = 38$ rectangles.

L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 L_6 L_7

De plus et de manière approximative:

- le 27 et le 14 $\approx$ 1 rectangle,
- le 26 et le 25 $\approx$ 1 rectangle,
- le 35 et le 15 $\approx$ 1 rectangle,
- le 41 et le 34 $\approx$ 1 rectangle,
- le 46 et le 45 $\approx$ 1 rectangle,
- le 50 et le 49 $\approx$ 1 rectangle,
- le 54 et le 53 $\approx$ 1 rectangle,
- le 57 et le 56 $\approx$ 1 rectangle.

Dans ces conditions, nous avons au total:

38 rectangles + 8 rectangles (environ) $\approx$ 46 rectangles.

Notons qu'un rectangle représente: 100 x 1 = 100 unités d'aire.

D'où: 46 rectangles x 100 = 4600 unités d'aire.

Ainsi, une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement est d'environ: $\frac{1}{15} \times 4600 \approx 307$ degrés Celsius.

3. b. b1. Calculons la valeur exacte de cette température moyenne θ:

La température moyenne du four entre deux instants t_1 et t_2 nous est donnée par la formule: $\theta = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$.

Sur les 15 premières heures de refroidissement, cette température moyenne est donc égale à: $\theta = \frac{1}{15 - 0} \int_{0}^{15} f(t)\, dt$.

f est continue sur [0; 15], elle admet donc des primitives sur [0; 15] et par conséquent: θ existe.

$$\theta = \frac{1}{15 - 0} \int_0^{15} f(t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{15} \int_0^{15} (980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20)\, dt$$

$$= \frac{1}{15} \left[980\, (-5\, e^{-\frac{t}{5}} + 20\, t) \right]_0^{15}$$

$$= \frac{980}{15} \left((-5\, e^{-3} + 300) - (5) \right)$$

$$= \frac{980}{3} \left((1 - e^{-3}) + 20 \right).$$

Ainsi, la valeur exacte de θ est: $\theta = \frac{980}{3} \left((1 - e^{-3}) + 20 \right).$

3. b. b2. Donnons la valeur arrondie de θ en degré Celsius:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur arrondie de θ en degré Celsius: $\theta \approx 330,4$ degrés Celsius.

4. a. Vérifions que pour tout réel $t > 0$, $d(t) = 980\, (1 - e^{-\frac{1}{5}})\, e^{-\frac{t}{5}}$:

D'après l'énoncé: $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

D'où: $d(t) = (980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20) - (980\, e^{-\frac{(t+1)}{5}} + 20)$

$$= 980\, e^{-\frac{t}{5}} - 980\, e^{-\frac{t}{5}} \times e^{-\frac{1}{5}}$$

$$= 980\, (1 - e^{-\frac{1}{5}})\, e^{-\frac{t}{5}}.$$

Au total, pour tout réel $t > 0$: $d(t) = 980\,(1 - e^{-\frac{1}{5}})\,e^{-\frac{t}{5}}$.

4. b. b1. Calculons la limite en $+\infty$ de $d(t)$:

$$\lim_{t \to +\infty} d(t) = \lim_{t \to +\infty} 980\,(1 - e^{-\frac{1}{5}})\,e^{-\frac{t}{5}}$$

$= 0$, car d'après Partie B 2. a.: $\lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$.

Ainsi: $\lim_{t \to +\infty} d(t) = 0$.

4. b. b2. Donnons une interprétation de ce résultat:

Nous avons donc: $\lim_{t \to +\infty} d(t) = 0$.

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'heures: la température finira par se stabiliser autour de 20 degrés Celsius.

20 degrés Celsius car: • $\lim_{t \to +\infty} d(t) = 0 \iff \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} f(t+1)$,

et: • $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 20$ degrés Celsius.