# Maths Complémentaires Terminale

## Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION, SYNTHÈSE 50

## CORRECTION

**1. a. Calculons $f(20)$:**

Ici: • $f(t) = (0,8t + 0,2)\, e^{-0,5t} + 0,03$

• $Df = [\,0\,;\,20\,]$.

Dans ces conditions: $f(20) = (0,8 \times 20 + 0,2)\, e^{-0,5 \times 20} + 0,03$

$= 16,2\, e^{-10} + 0,03$

$\approx 0,031$.

Ainsi: $f(20) \approx 0,031$.

Cela signifie que le taux de $CO_2$ au bout de 20 minutes est d'environ **3,1%**.

**1. b. Déterminons le taux maximal de $CO_2$ présent dans le local pendant l'expérience:**

D'après le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[\,0\,;\,20\,]$, nous constatons que le maximum de $f$ est atteint au point $\boldsymbol{M\,(1,75\,;\,f\,(1,75))}$.

Or: $f(1,75) \approx 0,697$.

Ainsi: le taux maximal de $CO_2$ présent dans le local pendant l'expérience est d'environ 69,7%.

**2. a. Justifions qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition:**

Il s'agit de démontrer que l'équation $V = f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: **T**.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit $f$ une fonction continue sur $[a\,;b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,;b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,;b]$.
>
> • Si de plus, la fonction $f$ est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a\,;b]$.

Ici:
- $f$ est continue sur $[\,0\,;20\,]$, donc sur $]\,1,75\,;20\,]$.
- " $k = 3,5\%$ " est compris entre: $f(20) \approx 3,1\%$

  et: $f(1,75) \approx 69,7\%$.
- $f$ est strictement décroissante sur $]\,1,75\,;20\,]$, d'après le tableau de variation de $f$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 3,5\%$ $(k = 3,5\%)$ admet une unique solution **T** appartenant à $]\,1,75\,;20\,]$.

Au total: $f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution **T** sur $]\,1,75\,;20\,]$.

2. b. b1. Déterminons la valeur de la variable $t$ à la fin de l'algorithme:

En programmant cet algorithme sur la calculatrice, nous obtenons comme valeur de la variable $t$ à la fin de l'algorithme: $t = 15,75$ minutes.

En effet:

- $f(15,65) \approx 0,0351 > 3,5\%$
- $f(15,75) \approx 0,03487 < 3,5\%$.

2. b. b2. Que représente cette valeur dans le cadre de l'exercice ?

Cela signifie que: **le taux de $CO_2$ présent dans le local pendant l'expérience est inférieur ou égal à 3,5% au delà de 15,75 minutes.**

Notons que: 15,75 minutes = 15 minutes et 45 secondes.



3. a. Montrons que $F$ est une primitive de $f$ sur $[0 ; 11]$:

Sur l'intervalle $[0 ; 11]$, $F$ est une primitive de $f$ ssi: $F'(t) = f(t)$.

Or ici, pour tout $t \in [0 ; 11]$:

$$F'(t) = (-1,6 \times e^{-0,5t}) + ((-1,6t - 3,6) \times (-0,5\, e^{-0,5t})) + 0,03$$

$$= 0,8t\, e^{-0,5t} + 0,2\, e^{-0,5t} + 0,03$$

$$= (0,8t + 0,2)\, e^{-0,5t} + 0,03$$

$$= f(t).$$

Au total, pour tout $t \in [0 ; 11]$: $F$ est bien une primitive de $f$ car $F'(t) = f(t)$.

3. b. Déduisons-en le taux moyen $V_m$, valeur moyenne de $f$ sur $[0 ; 11]$:

Soit " $V_m$ ", le taux moyen au valeur moyenne de $f$ sur $[0 ; 11]$.

$V_m$ est tel que: $V_m = \dfrac{1}{11 - 0} \displaystyle\int_0^{11} f(x)\, dx.$

Or: $\dfrac{1}{11-0}\displaystyle\int_0^{11} f(x)\,dx = \dfrac{1}{11}\left[\,F(x)\,\right]_0^{11}$

$$= \frac{1}{11}\left(F(11) - F(0)\right)$$

$$\approx 34,9\% \text{ arrondi à } 0,1\%.$$

Au total: le taux moyen $V_m$ est d'environ 34, 9%.

Cela signifie que le taux moyen de $CO_2$, dans le local pendant l'expérience, est d'environ 34, 9% pendant les 11 premières minutes.