

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Justifions mathématiquement que le problème se ramène à l'étude de l'équation  $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$ :

Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse  $x > 0$  afin que: **la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.**

Soient L et H la largeur et la hauteur de l'arc de chaînette.

Ici: •  $L = x - (-x)$  **cad:**  $L = 2x$ ;

•  $H = y_M - y_0$  **cad:**  $H = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) - 0 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$ .

Ainsi:  $L = H$  ssi:  $2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$

$\Leftrightarrow 4x = e^x + e^{-x} - 2$

$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$ .

Au total, pour tout  $x > 0$ , nous avons bien:  $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$ .

2. a. Vérifions l'égalité demandée:

Pour tout  $x > 0$ :  $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$

$= (e^x - 4x) + e^{-x} - 2$

$= x \left( \frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$ .

Au total, pour tout  $x > 0$ , nous avons bien:  $f(x) = x \left( \frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$ .

2. b. Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 4 \right) + \frac{1}{e^x} - 2.$$

Or, d'après le cours: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  (Théorème des croissances comparées),

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Et: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 = -2$ .

Ainsi: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$ ,

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 4 \right) = +\infty.$$

Dans ces conditions:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 - 2$

$$= +\infty.$$

Au total:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### 3. a. Calculons $f'$ pour $x \in [0; +\infty[$ :

Ici: •  $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$

•  $Df = [0; +\infty[$ .

Posons:  $h = f_1 + f_2 + f_3$ , avec:  $f_1(x) = e^x$ ,  $f_2(x) = e^{-x}$  et  $f_3(x) = -4x - 2$ .

$f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions "exponentielles", donc dérivables sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$f_3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme ( $f_1 + f_2 + f_3$ ) de trois fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ :  $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$ .

Au total, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ :  $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$ .

### 3. b. Montrons que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$ :

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , nous avons:  $f'(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} - 4 = 0$  (1).

En multipliant l'égalité (1) par  $e^x$ , nous obtenons:

$$e^x \times (e^x - e^{-x} - 4) = e^x \times 0$$

$$\iff e^x \times e^x - e^x \times e^{-x} - 4e^x = 0$$

$$\iff (e^x)^2 - 1 - 4e^x = 0.$$

Au total, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , nous avons bien:  $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$ .

3. c. Déterminons la solution de l'équation  $f'(x) = 0$ , en posant  $X = e^x$ :

Soit l'équation:  $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$  (2).

En posant:  $X = e^x$ , nous avons: (2)  $\Leftrightarrow X^2 - 4X - 1 = 0$ .

$\Delta = 16 + 4 = 20 > 0$ .

D'où 2 solutions dans  $\mathbb{R}$ : •  $X' = \frac{4 - \sqrt{20}}{2}$  cad:  $X' = 2 - \sqrt{5} < 0$ ,

•  $X'' = \frac{4 + \sqrt{20}}{2}$  cad:  $X'' = 2 + \sqrt{5} > 0$ .

Comme  $X = e^x$ , nous avons alors:  $x = \ln(X)$ .

Nous retiendrons uniquement la solution:  $X''$  car c'est la seule qui est strictement positive.

D'où:  $x = \ln(X'')$  cad:  $x = \ln(2 + \sqrt{5})$ .

Au total,  $f'(x) = 0$  admet une unique solution:  $x = \ln(2 + \sqrt{5})$ .

4. a. Dressons le tableau de variations de la fonction  $f$ :

Nous pouvons dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ :

$x$	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$	
$f'$		-	0	+
$f$	$a$			$c$

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = 0$ ,

•  $b = f(\ln(2 + \sqrt{5})) \Rightarrow b = 2\sqrt{5} - 2 - 4 \ln(2 + \sqrt{5})$ ,

$$\bullet c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Rightarrow c = +\infty.$$

4. b. Démontrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  strictement positive:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

• Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ , donc sur  $] \ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$ .

• " $k = 0$ " est compris entre:  $f(\ln(2 + \sqrt{5})) = 2\sqrt{5} - 2 - 4 \ln(2 + \sqrt{5})$

et:  $f(+\infty) = +\infty$ .

•  $f$  est strictement croissante sur  $] \ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 0$  ( $k = 0$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $] \ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$ .

**Au total:**  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] \ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$ .

5. a. Que contiennent les variables  $a$  et  $b$  à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Pour répondre à cette question, nous allons compléter un tableau avec les différentes valeurs prises par les variables  $a$  et  $b$ , à chaque étape de l'algorithme.

Le tableau complété est le suivant:

$m$	$a$	$b$	$b - a$
	2	3	1
2,5	2	2,5	0,5
2,25	2,25	2,5	0,25
2,375	2,375	2,5	0,125
2,4375	2,4375	2,5	0,0625

Au total, à la fin de l'exécution de l'algorithme, les variables  $a$  et  $b$  contiennent les valeurs:  $a = 2,4375$  et  $b = 2,5$ .

5. b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

Les valeurs  $a = 2,4375$  et  $b = 2,5$  sont telles que:  $2,4375 < \alpha < 2,5$ .

En d'autres termes,  $a$  et  $b$  fournissent un encadrement de la valeur de  $\alpha$  de la question 4. b., dont l'amplitude n'excède pas 0,1:

$$\alpha \in ]2,4375; 2,5[.$$

Au total, les valeurs de  $a$  et  $b$  sont telles que:  $a < \alpha < b$ .

6. Donnons un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch:

Soit l'équation:  $e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\left(\frac{t}{39}\right) - 2 = 0$  (3).

En posant  $x = \frac{t}{39}$ , nous avons: (3)  $\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Or l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] \ln(2 + \sqrt{5}); +\infty [$ .

Plus précisément  $\alpha$  est tel que:  $a < \alpha < b$ .

D'où:  $a < \alpha < b$ .

$$\Leftrightarrow a < \frac{t}{39} < b, \text{ car: } x = \alpha = \frac{t}{39}$$

$$\Leftrightarrow 39 \times a < t < 39 \times b$$

$$\Leftrightarrow 39 \times 2,4375 < t < 39 \times 2,5$$

$$\Leftrightarrow 95,0625 < t < 97,5.$$

Au total, un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch est:

$$(95,0625)^2 < H < (97,5)^2, \text{ avec: } H = t^2.$$

( la largeur = la hauteur = le double de la solution de l'équation  $f(x) = 0$  )

Ainsi, nous pouvons conclure en disant que la hauteur de la Gateway Arch est comprise entre 190,125 mètres et 195 mètres.