Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1, il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
-0,2	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3295
-6634	29654
-66341	296539
-729752	3261928
-8757025	39143135
-113841326	508860754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0;1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4. **a)** Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n \,\mathrm{e}^{1-x} \leq x^n \,\mathrm{e}$.

b) Justifier que : $\int_0^1 x^n \,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$1! = 1$$
$$2! = 2 \times 1$$
et si $n \geq 3$:
$$n! = n = (n-1) \times \cdots \times 1$$

On a ainsi par exemple

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2!$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3!$$
$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7!$$

Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1 \text{ et } I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}7$.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0{,}8$.