Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 30

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons graphiquement la durée de travail quotidien menant à saturation:

D'après l'énoncé, quand la fonction satisfaction atteint la valeur 100, on dit qu'il y a **saturation**.

Or ici: $f(x) = 100$ quand: $x = 3$ heures.

Ainsi: la durée de travail quotidien menant à **saturation** est de **3 heures**.

2. Déterminons graphiquement à partir de quelle durée de travail il y a rejet:

D'après l'énoncé, il y a rejet lorsque la fonction **envie** est strictement négative.

En d'autres termes, il y a rejet à partir du moment où: $f'(x) < 0$.

Or ici: $f'(x) < 0$ à partir de: 3 heures de travail.

Ainsi: à partir de **3 heures de travail** quotidien, il y a **rejet**.

Partie B:

1. Montrons que pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$, $g'(x) = (12,5 - 1,5625\,x)\,e^{-0,125x+1}$:

Ici: • $g(x) = 12,5x\,e^{-0,125x+1}$ **($u \times v$)**

• $Dg = [\,0\,;30\,]$.

Posons: $g = g_1 \times g_2$, avec: $g_1(x) = 12,5x$ et $g_2(x) = e^{-0,125x+1}$.

g est dérivable sur $[\,0\,;30\,]$ car g_1 et g_2 sont dérivables sur $[\,0\,;30\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$:

$g'(x) = (12,5) \times (e^{-0,125x+1}) + (12,5x) \times (-0,125\,e^{-0,125x+1})$ **($u' \times v + u \times v'$)**

$= (12,5 - 1,5625x)\,e^{-0,125x+1}$.

Au total, nous avons bien, pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$:

$g'(x) = (12,5 - 1,5625x)\,e^{-0,125x+1}$.

2. a. Etudions le signe de g' sur $[\,0\,;30\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$.

• **1er cas**: $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 0$ ssi $12,5 - 1,5625x = 0$, cad: $x = 8$.

• **2ème cas**: $g'(x) < 0$.

$g'(x) < 0$ ssi $12,5 - 1,5625x < 0$, cad: $x \in \,]\,8\,;30\,]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,125x+1} > 0$)

• **3ème cas**: $g'(x) > 0$.

$g'(x) > 0$ ssi $12,5 - 1,5625x > 0$, cad: $x \in [\,0\,;8\,[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,125x+1} > 0$)

Au total: • g est croissante sur $[\,0\,;\,8\,]$,

(car sur $[\,0\,;\,8\,]$, $g'(x) \geqslant 0$)

• g est décroissante sur $[\,8\,;\,30\,]$.

(car sur $[\,8\,;\,30\,]$, $g'(x) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau de variation de g sur $[\,0\,;\,30\,]$:

Sur $[\,0\,;\,30\,]$, le tableau de variation de g est le suivant:

x	0		8		30
g'		+	0	-	
g	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = g(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = g(8) \Rightarrow b = 100$,

• $c = g(30) \Rightarrow c = 375\, e^{-2,75} \approx 24$.

3. Déterminons la durée de séjour qui correspond à l'effet saturation:

D'après l'énoncé, quand la fonction satisfaction atteint la valeur 100, on dit qu'il y a **saturation**.

Or ici: $g(x) = 100$ quand: $x = 8$ jours. ($g(8) = 100$)

Ainsi: une durée de séjour de 8 jours mène à **saturation**.

Partie C:

1. Donnons sans justification une expression de $h''(x)$:

D'après le logiciel de calcul: $h''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

Au total, pour tout $x \in [10; 50]$: $h''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

2. Résolvons dans l'intervalle $[10; 50]$, $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$:

$e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \iff \ln(e^{-0,25x+6}) > \ln(1)$

$\iff -0,25x + 6 > 0$

$\iff 0,25x < 6$

$\iff x < 24$ cad: $x \in [10; 24[$.

Au total, l'inéquation admet comme solution: $x \in [10; 24[$.

3. Etudions la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$:

Ici:
- $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$
- $Dh = [10; 50]$
- $h''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$

Or:
- h est convexe ssi: $h''(x) \geq 0$,
- h est concave ssi: $h''(x) \leq 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\ 10 ; 50\ ]$, sachant que: $e^{-0,25x+6} > 0$.

• **1er cas**: $h''(x) \geqslant 0$.

$$h''(x) \geqslant 0 \text{ ssi } \frac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \geqslant 0$$

$\iff e^{-0,25x+6} - 1 \geqslant 0$, cad: $x \in [\ 10 ; 24\ ]$. (d'après question **2.**)

• **2ème cas**: $h''(x) \leqslant 0$.

$h''(x) \leqslant 0$ ssi $e^{-0,25x+6} - 1 \leqslant 0$, cad: $x \in [\ 24 ; 50\ ]$.

Au total: • h est convexe sur $[\ 10 ; 24\ ]$,

• h est concave sur $[\ 24 ; 50\ ]$.

4. Déterminons le salaire annuel à partir duquel la fonction envie décroît:

D'après l'énoncé, la fonction **envie** correspond à la dérivée de la fonction satisfaction.

D'où ici, la fonction **envie** correspond à **h'**.

Or h' décroît dès lors que: $h''(x) \leqslant 0$

cad quand: $x \geqslant 24000$ euros.

Ainsi, la fonction **envie** décroît dès que: le salaire annuel dépasse **24000 euros**.

5. Déterminons le salaire annuel pour lequel la satisfaction atteint 80:

La fonction satisfaction correspond ici à: $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$, avec $x \in [\ 10 ; 50\ ]$.

Dans ces conditions: $h(x) = 80$ ***quand*** $\dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} = 80$.

$$\frac{90}{1+e^{-0,25x+6}} = 80 \iff 90 = 80\,(1+e^{-0,25x+6})$$

$$\iff e^{-0,25x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\iff \ln(e^{-0,25x+6}) = -\ln(8)$$

$$\iff -0,25x+6 = -\ln(8)$$

$$\iff x = \frac{\ln(8)+6}{0,25} \quad \text{ou:} \quad x = 4\ln(8)+24.$$

Au total, le salaire annuel pour lequel la satisfaction atteint 80 est de:

$4\ln(8)+24 \approx 32\,000$ euros.