Maths Complémentaires Terminale

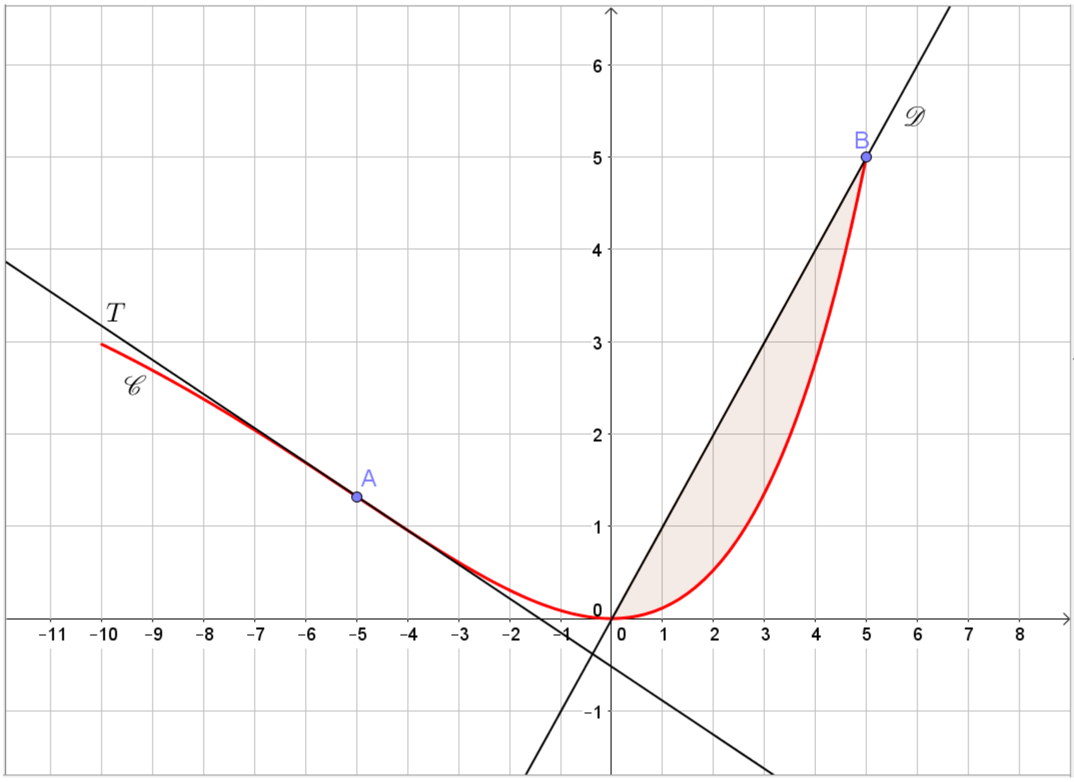
Fonctions, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Dans la figure ci-dessous sont représentés dans un repère orthogonal :

- la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,5]$;
- la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5 ;
- la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$;
- le domaine S situé entre la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$, grisé sur la figure.



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est :

a. $-\dfrac{1}{3}$ **b.** -3

c. 3 **d.** $\dfrac{1}{3}$

2. La fonction f semble :

a. concave sur $[-5\,;\,0]$ **b.** concave sur $[-10\,;\,0]$

c. convexe sur $[-10\,;\,5]$ **d.** convexe sur $[-5\,;\,5]$

3. L'aire du domaine S, en unité d'aire, appartient à l'intervalle :

a. $[-4\,;\,-2]$ **b.** $[4\,;\,7]$

c. $[0\,;\,3]$ **d.** $[7\,;\,10]$

Partie B

La fonction f précédente, définie et dérivable sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$, a pour expression $f(x) = (x-5)\mathrm{e}^{0,2x} + 5$.

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$.

a. Montrer que $f'(x) = 0,2x\mathrm{e}^{0,2x}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$.

c. Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -5.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$g(x) = 0.2x * \exp(0.2x)$ $\rightarrow \quad g(x) = \dfrac{1}{5}\ x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$
2	Dérivée $\quad g'(x) = \dfrac{1}{25}\ x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} + \dfrac{1}{5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$

a. En utilisant ces résultats, justifier que la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = (0,2 + 0,04x)\mathrm{e}^{0,2x}$.

b. Étudier la convexité de la fontion f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$.

3. On admet qu'une primitive de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5\ ]$ est la fonction F définie par $F(x) = (5x-50)\mathrm{e}^{0,2x} + 5x$.

a. Déterminer la valeur exacte de I définie par $I = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Montrer que l'aire du domaine du plan situé sous la droite $\mathcal{D}$, au-dessus de l'axe des abscisses et limité par la droite d'équation $x = 5$ vaut 12,5 unités d'aire.

c. En déduire une valeur approchée de l'aire du domaine S en unité d'aire.