Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 19

CORRECTION

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculons f' sur $[-2,5 ; 2,5]$:

Ici : • $f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5)$ **(ln (u))**

• $Df = [-2,5 ; 2,5]$.

Posons : $f = \ln(g)$, avec : $g(x) = -2x^2 + 13,5$.

g est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-2,5 ; 2,5]$ comme composée **(ln (g))** de 2 fonctions dérivables sur $[-2,5 ; 2,5]$, avec : $g > 0$ sur $[-2,5 ; 2,5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$.

Pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$: $f'(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$ $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$.

Au total, pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$: $f'(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$.

2. a. Dressons le tableau de variation de f sur $[-2,5 ; 2,5]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-4x = 0$, cad: $x = 0$.

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-4x < 0$, cad: $x > 0$ **ou** $x \in]\,0\,;\,2,5\,]$.

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-4x > 0$, cad: $x < 0$ **ou** $x \in [\,-2,5\,;\,0\,[$.

Au total: • f est croissante sur $[\,-2,5\,;\,0\,]$,

(car sur $[\,-2,5\,;\,0\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[\,0\,;\,2,5\,]$.

(car sur $[\,0\,;\,2,5\,]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	$-2,5$		0		$2,5$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(-2,5) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = \ln(13,5)$,

• $c = f(2,5) \Rightarrow c = 0$.

2. b. Déduisons-en le signe de f sur $[-2,5\,;\,2,5]$:

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que:

" Pour tout $x \in [-2,5\,;\,2,5]$, $f(x) > 0$ ".

Partie B: Aire de la zone de creusement

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ?

Soient A et B les points tels que: A $(0\,;\,f(0))$ et B $(2,5\,;\,f(2,5))$.

Comme $OA \neq OB$, nous pouvons affirmer que: la courbe $\mathscr{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O.

2. Justifions la valeur de l'aire $\mathscr{A}$:

Ici: $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx$.

Or: • f est paire sur $[-2,5\,;\,2,5]$, cad: $f(-x) = f(x)$.

$$\left(\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \times \int_{0}^{a} f(x)\,dx \right)$$

• nous sommes en présence d'un repère orthonormal d'unité 2 mètres; donc une unité d'aire est égale à 4 (mètres)^2.

Dans ces conditions: $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx \iff \mathscr{A} = 4 \times 2 \times \int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$.

Au total, nous avons bien: $\mathscr{A} = 8 \displaystyle\int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$.

3. a. Complétons le tableau en calculant les six valeurs manquantes:

Nous avons le tableau complété suivant:

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

```
Variables
    R et S sont des réels
    n et k sont des entiers
Traitement
    S prend la valeur 0
    Demander la valeur de n
    Pour k variant de 1 à n faire
        R prend la valeur 2,5/n × f(2,5/n × k)
        S prend la valeur S + R
    Fin Pour
    Afficher S
```

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0$ $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	0,130 116	0,130 116
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	0,519 981
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	0	5,197 538
Affichage	$S =$ 5,197 538		

3. b. Déduisons-en une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement:

En prenant $a = 5,197\,538$ et $n = 50$, nous obtenons:

$$5,197\,538 \leqslant I \leqslant 5,32\,767.$$

Comme: $\mathscr{A} = 8 \times I$, $41,581 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42,622$.

Ainsi, une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement est: $\mathscr{A} = 42$ m^2.