Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 14

CORRECTION

1. Montrons que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$:

Ici: • $f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$, **avec**: $b \geqslant 2$

• $Df = [\,0\,;\,1\,[$

• $f'(x) = \dfrac{-bx + b - 2}{1 - x}$.

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,[$:

• **1^{er} cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-bx + b - 2 = 0$, **cad**: $x = \dfrac{b-2}{b}$, **car**: $1 - x \neq 0$ sur $[\,0\,;\,1\,[$.

• **$2^{ème}$ cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-bx + b - 2 < 0$, **cad**: $x > \dfrac{b-2}{b}$, **car**: $1 - x \neq 0$ sur $[\,0\,;\,1\,[$.

• **$3^{ème}$ cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-bx + b - 2 > 0$, **cad**: $x < \dfrac{b-2}{b}$, **car**: $1 - x \neq 0$ sur $[\,0\,;\,1\,[$.

Ainsi: • f est croissante sur $\left[\,0\,;\,\dfrac{b-2}{b}\,\right]$,

(car sur $\left[\,0\,;\,\dfrac{b-2}{b}\,\right]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[\frac{b-2}{b}; 1[$.

(car sur $[\frac{b-2}{b}; 1]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Dans ces conditions, le tableau de variations de f est le suivant:

x	0		$\frac{b-2}{b}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f	a'	$\nearrow$	b'	$\searrow$	c'

Avec: • $a' = f(0)$ => $a' = 0$,

• $b' = f\left(\frac{b-2}{b}\right)$ => $b' = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$,

• $c' = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Au total, nous pouvons dire que la fonction f admet un maximum quand:

$$x = \frac{b-2}{b}.$$

Soit M ce maximum, les coordonnées de M sont:

• $x_M = \frac{b-2}{b}$

• $y_M = f(x_M) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminons pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1, 6 mètres:

D'après la question précédente, la hauteur maximale du projectile nous est donnée par: $H(b) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$, avec: $b \geqslant 2$.

Or, on cherche les valeurs du paramètre b telles que:

$H(b) \leqslant 1,6$ mètres **cad**: $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leqslant 1,6$, **avec**: $b \in [\,2\,;+\infty\,[$.

Notons que la fonction H est strictement croissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$ car sur cet intervalle: $H'(b) = 1 - \frac{2}{b} > 0$.

En procédant par tâtonnement et à l'aide d'une machine à calculer, on trouve que quand: $b \in [\,2\,;5,69\,[$, $H(b) \leqslant 1,6$ mètres.

Ainsi, la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1, 6 mètres quand les valeurs du paramètre b sont telles que: $2 \leqslant b < 5,69$.

3. Déterminons une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ:

- L'équation de la tangente **T** à la courbe de la fonction f au point d'abscisse $x = 0$ est: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

  <=> $y = (b - 2)x + 0$, car: $f'(0) = b - 2$ et $f(0) = 0$

  <=> $y = (5,69 - 2)x$, car: $b = 5,69$

  <=> $y = 3,69\,x$.

- Sachant que $b = 5,69$, soient les 3 points suivants:

- $O\,(0\,;0)$,
- $C\,(1\,;0)$, C est situé sur l'axe des abscisses,
- $D\,(1\,;3,69)$, D appartient à la tangente **T**.

• En reliant les points O, C et D, nous obtenons un triangle rectangle en C:

le triangle OCD.

Dans ces conditions l'angle θ est tel que: $\mathbf{\tan(\theta) = \dfrac{CD}{OC}}$.

Or, $\dfrac{CD}{OC} = \dfrac{3,69}{1}$ et donc θ est tel que: $\mathbf{\tan\theta = 3,69}$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\theta \approx 74,8368$ degrés.

En conclusion une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ est:

74, 8.