BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

ÉNONCÉ
EXERCICE 2

2022

BACCALAURÉAT

SUJET 2

Bac Mathématiques

AMÉRIQUE DU NORD

2022

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) Thèmes : probabilités, suites

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- si un vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

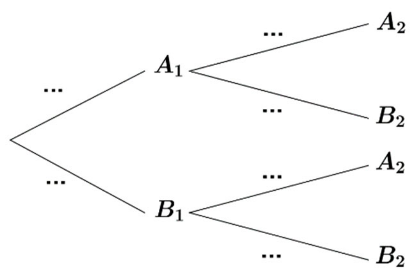
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les événements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin » ;
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n la probabilité de l'événement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

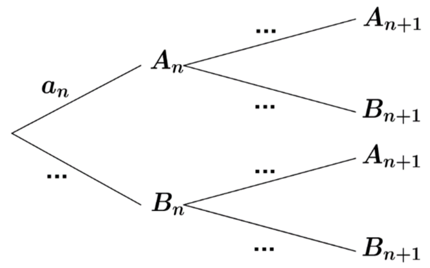
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins.



2. a. Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6\, a_n + 0{,}24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (7 points) Thèmes : fonctions, fonction exponentielle

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

4. Donner le tableau de signe de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

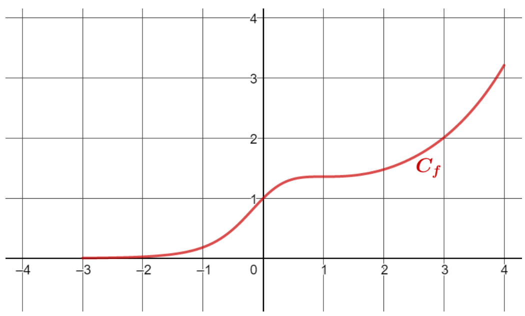
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

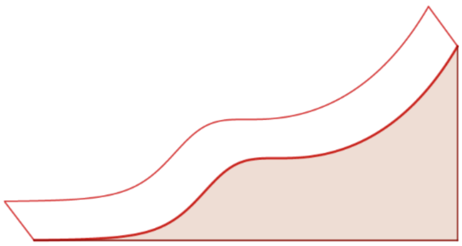
1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

b. Justifier que la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe C_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe C_f



Vue de profil du toboggan

a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1 + x^2)^3}$$

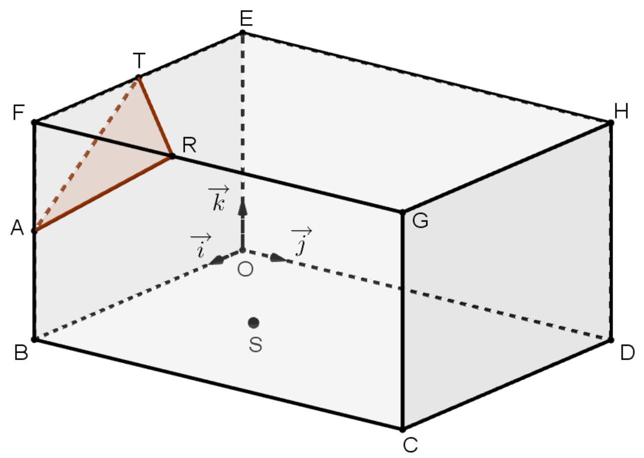
où p est la fonction définie dans la **partie A**.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 3 (7 points) — Thème : géométrie dans l'espace

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où $\mathrm{OB} = 6$ m, $\mathrm{OD} = 8$ m et $\mathrm{OE} = 4$ m.

On utilise le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$.



Dans ce repère, on a, en particulier : $\mathrm{C}(6, 8, 0)$, $\mathrm{F}(6, 0, 4)$ et $\mathrm{G}(6, 8, 4)$.

Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $\mathrm{A}(6, 0, 2)$, $\mathrm{R}(6, 3, 4)$ et $\mathrm{T}(3, 0, 4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3,\ \frac{5}{2}, 0\right)$.

1. **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AT}}$.

c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{RAT}}$.

2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

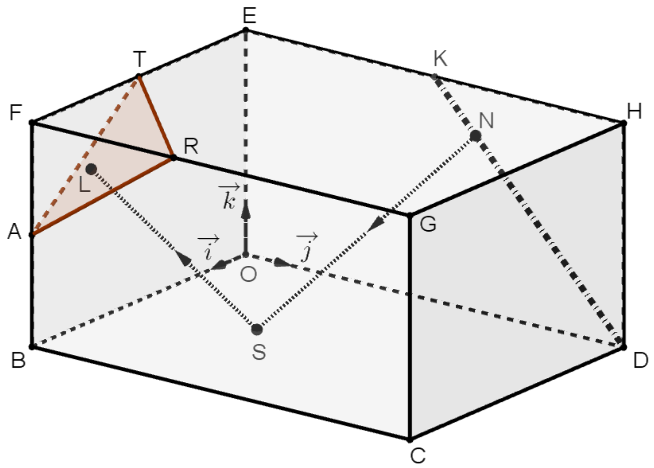
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \dfrac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbf{R}.$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART). Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5,\ \frac{1}{2}, 3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] où K est le milieu du segment [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, le point N de coordonnées $(0\,,\ 8-4t\ ,\ 4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Exercice 4 (7 points) Thèmes : fonction logarithme népérien, probabilités

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) qui comprend six questions. Les six questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

Le réel a défini par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

a) $1-\frac{1}{2}\ln(3)$ b) $\frac{1}{2}\ln(3)$ c) $3\ln(3) + \frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}\ln(3)$

Question 2

On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x - 10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x.

a) 3 est solution de (E).

b) $5 - \sqrt{46}$ est solution de (E).

c) L'équation (E) admet une unique solution réelle.

d) L'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes.

Question 3

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1 + \ln x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

b) La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ est différent de 0.

d) La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$ est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Question 4

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millième, est :

a) 0,683 b) 0,346 c) 0,230 d) 0,165

Question 5

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. La probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millième, est :

a) $0{,}078$ b) $0{,}259$ c) $0{,}337$ d) $0{,}922$

Question 6

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus.

On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces 5 tirages.

Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes tirés est égal à :

a) $0{,}4$ b) $1{,}2$ c) 2 d) $2{,}5$