Maths Complémentaires Terminale

Dérivées avec « exponentielle »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATIONS DE LA FONCTION f

4

CORRECTION

1. $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x+1} + e$: $(U + V + W)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x} - e^{x+1}$.

$(U' + V' + W')$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x} - e^{x+1}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geq 0 \iff e^{2x} - e^{x+1} \geq 0 \iff e^{2x} \geq e^{x+1} \iff 2x \geq x + 1 \iff x \geq 1$

  cad $x \in [\, 1; +\infty\, [$,

- $f'(x) \leq 0 \iff e^{2x} - e^{x+1} \leq 0 \iff e^{2x} \leq e^{x+1} \iff 2x \leq x + 1 \iff x \leq 1$

  cad $x \in]-\infty; 1]$.

Ainsi: • f est croissante sur $[\, 1; +\infty\, [$,

• f est décroissante sur $]-\infty; 1]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	A	$\nearrow$	

, $A = f(1) = -\dfrac{1}{2}e^2 + e$.

2. $f(x) = \dfrac{e^{1-x}}{x^2+1}$: $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $(x^2 + 1 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R})$

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{(-e^{1-x}) \times (x^2+1) - (e^{1-x}) \times (2x)}{(x^2+1)^2}$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$$

$$= \frac{-(x+1)^2 e^{1-x}}{(x^2+1)^2}.$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-(x+1)^2 e^{1-x}}{(x^2+1)^2}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $I\!R$:

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de " $(x + 1)^2$ " et du signe de " $(x^2 + 1)^2$ ", car pour tout réel x: $e^{1-x} > 0$.

Or, pour tout $x \in I\!R$: $(x + 1)^2 > 0$ et $(x^2 + 1)^2 > 0$.

Donc: $f'(x) < 0$ sur $I\!R$.

Ainsi: f est strictement décroissante sur $I\!R$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur $I\!R$:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$