

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Dérivées avec « **exponentielle** »



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATIONS DE LA FONCTION f

3

CORRECTION

$$1. f(x) = e^{2x} + 4e^x - 6x: (U + V + W)$$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{Dans ces conditions, pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x - 6$$

$$(U' + V' + W')$$

$$= 2(e^x)^2 + 4e^x - 6.$$

$$\text{D'où, pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = 2(e^x)^2 + 4e^x - 6.$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} :

Pour déterminer le signe de $f'(x)$, nous allons résoudre l'équation:

$$2(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0.$$

Procédons au changement de variable: $X = e^x$.

$$\text{D'où: } 2(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0 \iff 2X^2 + 4X - 6 = 0. (aX^2 + bX + c = 0)$$

$$\bullet \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 48 = 64 = (8)^2 > 0.$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes:

$$\bullet X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 8}{4} = -3 < 0,$$

$$\bullet X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 8}{4} = 1 > 0.$$

Notons que comme $X = e^x > 0$, la solution X , n'est pas possible car $X_1 < 0$.

L'équation $2X^2 + 4X - 6 = 0$ admet donc une seule solution: $X = 1$.

Or: $X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$ **cad** $x = 0$.

En définitive, l'équation $2(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0$ admet une solution unique: $x = 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geq 0$ ssi $x \geq 0$ **cad** $x \in [0; +\infty[$,

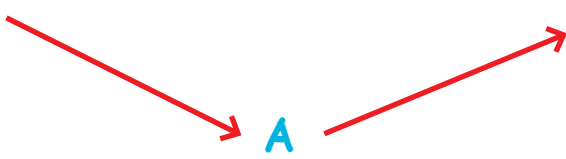
- $f'(x) \leq 0$ ssi $x \leq 0$ **cad** $x \in]-\infty; 0]$.

Ainsi: • f est croissante sur $[0; +\infty[$,

- f est décroissante sur $] -\infty; 0]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

$$, A = f(0) = 5.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{2}e^x - e^{x+1} + 21: (U + V + W)$$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{Dans ces conditions, pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{1}{2}e^x - e^{x+1}$$

$$(U' + V' + W')$$

$$= \left(\frac{1}{2} - e\right)e^x.$$

$$\text{D'où, pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = \left(\frac{1}{2} - e\right)e^x.$$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} :

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $\frac{1}{2} - e$ ", car pour tout réel x : $e^x > 0$.

$$\text{Or: } \frac{1}{2} - e < 0.$$

Donc: $f'(x) < 0$ sur \mathbb{R} .

Ainsi: f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

c. Dressons le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	