Maths Complémentaires Terminale

Dérivées avec « exponentielle »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATIONS DE LA FONCTION f 3

CORRECTION

1. $f(x) = e^{2x} + 4e^{x} - 6x$: $(U + V + W)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur IR.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = 2e^{2x} + 4e^{x} - 6$

$(U' + V' + W')$

$= 2(e^{x})^2 + 4e^{x} - 6.$

D'où, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = 2(e^{x})^2 + 4e^{x} - 6.$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur IR:

Pour déterminer le signe de $f'(x)$, nous allons résoudre l'équation:

$$2(e^{x})^2 + 4e^{x} - 6 = 0.$$

Procédons au changement de variable: $X = e^{x}$.

D'où: $2(e^{x})^2 + 4e^{x} - 6 = 0 \iff 2X^2 + 4X - 6 = 0.$ $(aX^2 + bX + c = 0)$

• $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 48 = 64 = (8)^2 > 0.$

• Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes:

$$\bullet\ X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-8}{4} = -3 < 0,$$

$$\bullet\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+8}{4} = 1 > 0.$$

Notons que comme $X = e^x > 0$, la solution X_1 n'est pas possible car $X_1 < 0$.

L'équation $2X^2 + 4X - 6 = 0$ admet donc une seule solution: $X = 1$.

Or: $X = 1 \iff e^x = 1 \iff e^x = e^0$ **cad** $x = 0$.

En définitive, l'équation $2(e^x)^2 + 4e^x - 6 = 0$ admet une solution unique: $x = 0$.

Distinguons deux cas:

• $f'(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$ **cad** $x \in [\,0\,;+\infty\,[$,

• $f'(x) \leqslant 0$ ssi $x \leqslant 0$ **cad** $x \in\,]-\infty\,;0\,]$.

Ainsi: • f est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$,

• f est décroissante sur $]-\infty\,;0\,]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	A	$\nearrow$	

, $A = f(0) = 5$.

2. $f(x) = \frac{1}{2}e^x - e^{x+1} + 21$: $(U + V + W)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1}{2}e^x - e^{x+1}$

$(U' + V' + W')$

$= \left(\frac{1}{2} - e\right)e^x$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{1}{2} - e\right)e^x$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $\frac{1}{2} - e$ ", car pour tout réel x: $e^x > 0$.

Or: $\frac{1}{2} - e < 0$.

Donc: $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$