Maths Complémentaires Terminale

Dérivées avec « exponentielle »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATIONS DE LA FONCTION f 2

CORRECTION

1. $f(x) = (x+7)(e^x - 1) + x$: $(U \times V + W)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = [\,(1) \times (e^x - 1) + (x+7) \times (e^x)\,] + [\,1\,]$

$([\,U' \times V + U \times V'\,] + [\,W'\,])$

$= (x+8)\,e^x.$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (x+8)\,e^x.$

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $x + 8$ ", car pour tout réel x: $e^x > 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geq 0$ ssi $x + 8 \geq 0$ cad ssi $x \geq -8$ cad $x \in [-8\,;+\infty[$,
- $f'(x) \leq 0$ ssi $x + 8 \leq 0$ cad ssi $x \leq -8$ cad $x \in\,]-\infty\,;-8]$.

Ainsi: • f est croissante sur $[-8 ; +\infty[$,

• f est décroissante sur $]-\infty ; -8]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur $I\!R$:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	A	$\nearrow$	

, $A = f(-8) = (1 - e^{8}) - 8$.

2. $f(x) = 7x\, e^{-x} - 2\, e^{-x}$: $(U \times V + W)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur $I\!R$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in I\!R$: $f'(x) = [\,(7) \times (e^{-x}) + (7x) \times (-e^{-x})\,] + [\,2\, e^{-x}\,]$

$([\,U' \times V + U \times V'\,] + [\,W'\,])$

$= (-7x + 9)\, e^{-x}$.

D'où, pour tout $x \in I\!R$: $f'(x) = (-7x + 9)\, e^{-x}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $I\!R$:

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $-7x + 9$ ", car pour tout réel x: $e^{-x} > 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geqslant 0$ ssi $-7x + 9 \geqslant 0$ cad ssi $x \leqslant \frac{9}{7}$ **cad** $x \in \left]-\infty ; \frac{9}{7}\right]$,
- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $-7x + 9 \leqslant 0$ cad ssi $x \geqslant \frac{9}{7}$ **cad** $x \in \left[\frac{9}{7} ; +\infty\right[$.

Ainsi:
- f est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{9}{7}\right]$,
- f est décroissante sur $\left[\frac{9}{7} ; +\infty\right[$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur IR:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	A	↘	

, $A = f\left(\frac{9}{7}\right) = 7e^{-\frac{9}{7}}$.

3. $f(x) = x\, e^{2x} + 5\, e^{2x}$: $(U \times V + W)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur IR.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = [\,(1) \times (e^{2x}) + (x) \times (2\, e^{2x})\,] + [\,10\, e^{2x}\,]$

$([\,U' \times V + U \times V'\,] + [\,W'\,])$

$= (2x + 11)\, e^{2x}$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (2x + 11)\, e^{2x}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $2x + 11$ ", car pour tout réel x : $e^{2x} > 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geq 0$ ssi $2x + 11 \geq 0$ cad ssi $x \geq -\dfrac{11}{2}$ cad $x \in \left[-\dfrac{11}{2} ; +\infty\right[$,
- $f'(x) \leq 0$ ssi $2x + 11 \leq 0$ cad ssi $x \leq -\dfrac{11}{2}$ cad $x \in \left]-\infty ; -\dfrac{11}{2}\right]$.

Ainsi:
- f est croissante sur $\left[-\dfrac{11}{2} ; +\infty\right[$,
- f est décroissante sur $\left]-\infty ; -\dfrac{11}{2}\right]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-\dfrac{11}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	A	$\nearrow$	

, $A = f\left(-\dfrac{11}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\, e^{-11}$.