Maths Complémentaires Terminale

Dérivées avec « exponentielle »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATIONS DE LA FONCTION f

I

CORRECTION

1. $f(x) = (-4x + 5)\, e^{-x}$: $(U \times V)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (-4) \times (e^{-x}) + (-4x + 5) \times (-e^{-x})$

$(U' \times V + U \times V')$

$= (4x - 9)\, e^{-x}$.

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (4x - 9)\, e^{-x}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $4x - 9$ ", car pour tout réel x : $e^{-x} > 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geq 0$ ssi $4x - 9 \geq 0$ cad ssi $x \geq \dfrac{9}{4}$ cad $x \in \left[\dfrac{9}{4} ; +\infty\right[$,
- $f'(x) \leq 0$ ssi $4x - 9 \leq 0$ cad ssi $x \leq \dfrac{9}{4}$ cad $x \in \left]-\infty ; \dfrac{9}{4}\right]$.

Ainsi: • f est croissante sur $\left[\frac{9}{4}; +\infty\right[$,

• f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{9}{4}\right]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur IR:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	A	↗	

, $A = f\left(\frac{9}{4}\right) = -4\, e^{-\frac{9}{4}}$.

2. $f(x) = (x + 4)\, e^{2x}$: $(U \times V)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur IR.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (1) \times (e^{2x}) + (x + 4) \times (2\, e^{2x})$

$(U' \times V + U \times V')$

$= (2x + 9)\, e^{2x}$.

D'où, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (2x + 9)\, e^{2x}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur IR:

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $2x + 9$ ", car pour tout réel x: $e^{2x} > 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geqslant 0$ ssi $2x + 9 \geqslant 0$ cad ssi $x \geqslant -\frac{9}{2}$ cad $x \in [-\frac{9}{2}; +\infty[$,
- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $2x + 9 \leqslant 0$ cad ssi $x \leqslant -\frac{9}{2}$ cad $x \in]-\infty; -\frac{9}{2}]$.

Ainsi:
- f est croissante sur $[-\frac{9}{2}; +\infty[$,
- f est décroissante sur $]-\infty; -\frac{9}{2}]$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur IR:

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	A	$\nearrow$	

, $A = f\left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2} e^{-9}$.

3. $f(x) = (-3x + 1)(2e^{x+1})$: $(U \times V)$

a. Calculons $f'(x)$:

f est définie et dérivable sur IR.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (-3) \times (2e^{x+1}) + (-3x + 1) \times (2e^{x+1})$

$(U' \times V + U \times V')$

$= (-6x - 4)\, e^{x+1}$.

D'où, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (-6x - 4)\, e^{x+1}$.

b. Étudions le signe de $f'(x)$ sur IR :

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de " $-6x - 4$ ", car pour tout réel x : $e^{x+1} > 0$.

Distinguons deux cas:

- $f'(x) \geq 0$ ssi $-6x - 4 \geq 0$ cad ssi $x \leq -\frac{2}{3}$ cad $x \in \left]-\infty\,; -\frac{2}{3}\right]$,
- $f'(x) \leq 0$ ssi $-6x - 4 \leq 0$ cad ssi $x \geq -\frac{2}{3}$ cad $x \in \left[-\frac{2}{3}\,; +\infty\right[$.

Ainsi:
- f est croissante sur $\left]-\infty\,; -\frac{2}{3}\right]$,
- f est décroissante sur $\left[-\frac{2}{3}\,; +\infty\right[$.

c. Dressons le tableau de variations de f sur IR :

Nous avons donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	A	$\searrow$	

, $A = f\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\, e^{\frac{1}{3}}$.