1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Fonctions cosinus et sinus

Correction

LE TERRAIN DE RUGBY

CORRECTION

1. Exprimons $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x:

a. $\tan\alpha$:

D'après l'énoncé, $\tan\alpha = \tan(\widehat{ETA})$.

Or: $\tan(\widehat{ETA}) = \dfrac{EA}{ET}$ => $\tan\alpha = \dfrac{25}{x}$.

b. $\tan\beta$:

D'après l'énoncé, $\tan\beta = \tan(\widehat{ETB})$.

Or: $\tan(\widehat{ETB}) = \dfrac{EB}{ET}$

$= \dfrac{EA + AB}{ET}$ => $\tan\beta = \dfrac{30,6}{x}$.

Au total: $\tan\alpha = \dfrac{25}{x}$ et $\tan\beta = \dfrac{30,6}{x}$.

2. Montrons que la fonction tan est strictement croissante sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

Ici: • $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

• $Df = \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = \sin x$ et $f_2(x) = \cos x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, avec: pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$: $f'(x) = \dfrac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{(\cos x)^2}$

$(\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$ $\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Au total: pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

De plus comme sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2 x > 0$, nous pouvons dire que:

$f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

3. Montrons que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}$:

D'après la relation de Chasles sur les angles: $\widehat{ETA} + \widehat{ATB} = \widehat{ETB}$.

D'où: $\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \beta - \alpha$.

Dans ces conditions: $\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha)$

$\left(\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}\right)$ $\quad = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \times \tan\alpha}$

$$= \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \left(\frac{30,6}{x}\right)\left(\frac{25}{x}\right)}$$

$$= \frac{(30,6 - 25) \times x}{x^2 + (30,6)(25)}$$

$$\Rightarrow \tan\gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}.$$

Au total, nous avons bien: $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}.$

4. a. Montrons que γ maximal correspond à un minimum de f sur $]0;50]$:

γ est maximal quand $\tan\alpha$ est maximale, car la fonction tan est strictement croissante sur $]0;50]$.

Donc γ est maximal quand $\dfrac{1}{\tan\gamma}$ minimale cad $\dfrac{1}{\dfrac{5,6x}{x^2+765}} = \dfrac{x^2 + 765}{5,6x}.$

Ou encore: $\left(x + \dfrac{765}{x}\right) \times \dfrac{1}{5,6}$ minimale.

Cela revient à dire que:

γ est maximal quand la fonction $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$ est minimale.

4. b. Montrons qu'il existe une unique valeur de x telle que $\tan\gamma$ soit maximale et déterminons cette valeur de x:

- **Étape 1: calculons f'.**

Ici: • $f(x) = x + \dfrac{765}{x} = \dfrac{x^2 + 765}{x}$

• $Df =]0;50]$

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = x^2 + 765$ et $f_2(x) = x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $]0;50]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]0;50]$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;50]$, avec: pour tout $x \in]0;50]$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;50]$.

Pour tout $x \in]0;50]$: $f'(x) = \dfrac{(2x)(x) - (x^2 + 765) \times (1)}{x^2}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}.$$

- **Étape 2: déterminons le signe de f'.**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $]0;50]$.

- **1er cas:** $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $1 - \dfrac{765}{x^2} = 0$, cad: $x = \sqrt{765}$.

- **2eme cas:** $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $1 - \dfrac{765}{x^2} < 0$, cad: $x < \sqrt{765}$.

- **3eme cas:** $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $1 - \dfrac{765}{x^2} > 0$, cad: $x > \sqrt{765}$.

- **Étape 3: dressons le tableau de variation de f.**

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		$\sqrt{765}$		50
f'	||	$-$	0	$+$	
f	||	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Avec: " m " correspond donc à la valeur minimale de f.

Notons que: $m = f(\sqrt{765}) \Rightarrow m = \frac{765 + 765}{\sqrt{765}}$

$\Rightarrow m = 2\sqrt{765}$.

• **Étape 4: détermination de x.**

Comme nous l'avons dit: γ est maximal quand $\left(x \times \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$ est minimale.

Or, $\left(x \times \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$ est minimale quand: $x = \sqrt{765}$.

Et dans ce cas: $\tan\gamma = \frac{5,6}{f(\sqrt{765})}$

cad: $\tan\gamma = 0,10$, à $0,01$ près.

En résumé:
- il existe une unique valeur de x par laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et cette valeur de x est: $x_{min} = \sqrt{765}$,
- l'angle $\widehat{ATB}$ est alors maximum et égal à: $\tan\gamma = 0,10$.