1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Fonctions cosinus et sinus

Correction

RESTREINDRE L'ÉTUDE À UN INTERVALLE

3

CORRECTION

1. Montrons que f est 2π-périodique:

D'après le cours, soient f une fonction définie sur I et $T > 0$ un nombre réel tel que si $x \in I$, alors $x + T \in I$.

f est dite périodique de période T si: $f(x+T) = f(x)$.

Notons qu'ici: si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + T \in \mathbb{R}$.

Ici:
$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(2(x+2\pi)) + 2\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x+4\pi) + 2\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x+2\pi+2\pi) + 2\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x+2\pi) + 2\sin(x) \\ &= \cos(2x) + 2\sin(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction $\cos(2x) + 2\sin(x)$ est donc bien périodique de période 2π.

2. f est-elle paire ? impaire ?

D'après le cours, une fonction f définie sur un ensemble I, symétrique par rapport à " 0 ", est:

- paire ssi pour tout $x \in I$: $f(-x) = f(x)$,
- impaire ssi pour tout $x \in I$: $f(-x) = -f(x)$.

Notons qu'ici: l'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à " 0 ".

$$f(-x) = \cos(2(-x)) + 2\sin(-x)$$
$$= \cos(-2x) - 2\sin(x)$$
$$= \cos(2x) - 2\sin(x).$$

Or:
- $f(x) = \cos(2x) + 2\sin(x)$
- $-f(x) = -\cos(2x) - 2\sin(x)$.

Donc: $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: f n'est ni paire, ni impaire.

3. Déterminons l'intervalle sur lequel on peut étudier le sens de variation de f:

Comme f est 2π-périodique: on peut réduire l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

4. Calculons f':

f est dérivable sur $[-\pi ; \pi]$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [-\pi ; \pi]$:

$$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(x)$$

$$= -4\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)$$

$$= 4\cos(x)\left[\frac{1}{2} - \sin(x)\right].$$

Ainsi, pour tout $x \in [-\pi ; \pi]$: $f'(x) = 4\cos(x)\left[\frac{1}{2} - \sin(x)\right].$

5. a. Dressons le tableau de signes de f':

Nous avons le tableau de signes de f' suivant:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{1}{2} - \sin(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5. b. Déduisons-en le sens de variation de f:

Sur $[-\pi ; \pi]$, nous avons:

- $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right].$
- $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}\right].$

Ainsi: • f est décroissante sur $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$.

• f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]$.