

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Fonctions cosinus et sinus

Correction

 www.freemaths.fr

QUELLE PÉRIODE CHOISIR ?

2

CORRECTION

Déterminons une période de la fonction f définie sur \mathbb{R} :

D'après le cours, soient f une fonction définie sur I et $T > 0$ un nombre réel tel que si $x \in I$, alors $x + T \in I$.

f est dite **périodique de période T** si: $f(x + T) = f(x)$.

Notons qu'ici: si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + T \in \mathbb{R}$.

Soit T , une période de la fonction f , nous avons:

$$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(2(x + T)) - 2 \cos\left(\frac{x + T}{2}\right) = \sin(2x) - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + 2T) - 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right) = \sin(2x) - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) \cos(2T) + \cos(2x) \sin(2T) - 2 \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right.$$

$$\left. \cos\left(\frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{T}{2}\right) \right] = \sin(2x) - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Par identification, nous obtenons pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \cos(2T) = 1 \\ \sin(2T) = 0 \\ \cos\left(\frac{T}{2}\right) = 1 \\ \sin\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2T = 2\pi + 2k\pi \\ 2T = 2\pi + 2k\pi \\ \frac{T}{2} = 2\pi + 2k\pi \\ \frac{T}{2} = 2\pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = \pi + k\pi \\ \text{ou} \\ T = 4\pi + 4k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Nous devons donc choisir entre: π et 4π .

Or le PPCM (Plus Petit Multiple Commun) des valeurs π et 4π est: 4π .

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction f est périodique de période 4π .