1re

MATHÉMATIQUES

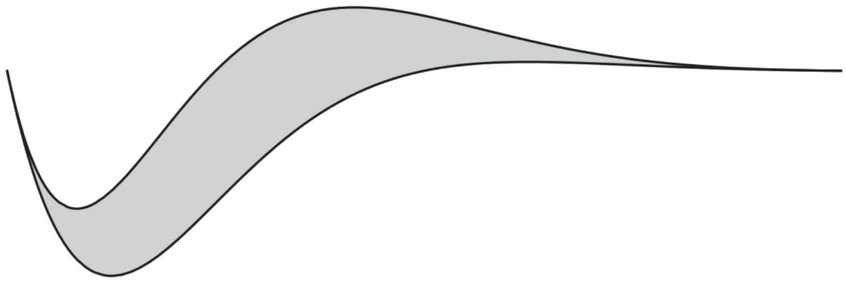
Enseignement de Spécialité

Fonctions cosinus et sinus

Énoncé

FONCTION

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbf{R}$.

Partie A – Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$$-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
   a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
   b. En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Partie B – Aire du logo

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en **ANNEXE**.

1. Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g sur $\mathbf{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
On admet que H est une primitive de la fonction $x \longmapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbf{R}$.
On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe C_f, la courbe C_g et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

ANNEXE