1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Fonctions cosinus et sinus

Correction

ÉTUDE D'UNE FONCTION f

CORRECTION

1. Sur quel intervalle peut-on étudier f ?

Puisque la fonction f est 2π-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π comme: **$[-\pi\,;\pi]$**.

De plus, comme f est paire, on peut restreindre à nouveau l'étude de f à: **$[0\,;\pi]$**.

Au total: **on peut donc étudier le sens de variation de f sur l'intervalle restreint $[0\,;\pi]$.**

2. Calculons la dérivée f' de f:

f est dérivable sur $[0\,;\pi]$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(2x) + \sin(x) \\ &= -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) \\ &= \sin(x)\,[1 - 2\cos(x)]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0\,;\pi]$: $f'(x) = \sin(x)\,[1 - 2\cos(x)]$.

3. Dressons le tableau de variations:

Nous avons le tableau de variations de f suivant:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

, avec:
- $a = f(0) = -\frac{1}{2}$
- $b = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$
- $c = f(\pi) = \frac{3}{2}$.

$$\left(f'(x) = 0 \text{ ssi: } x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \pi \right)$$

4. Déduisons-en le sens de variations de f:

Sur $[0; \pi]$, nous avons:
- $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
- $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Ainsi:
- f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
- f est croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.