1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Équations & Inéquations Trigonométriques

Correction

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ... 5

CORRECTION

1. Résolvons l'équation $4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2} - 1)\cos(x) - \sqrt{2} = 0$ dans $I = [0; \pi]$.

Soit l'équation: $4\cos^2(x) + 2(\sqrt{2} - 1)\cos(x) - \sqrt{2} = 0$ (1).

En posant $X = \cos(x)$, l'équation (1) devient: $4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$.

$\Delta = (2(\sqrt{2} - 1))^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{2}) = 4(2 + 2\sqrt{2} + 1) = (2(\sqrt{2} + 1))^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes qui sont:

$$X' = \frac{-2(\sqrt{2} - 1) - 2(\sqrt{2} + 1)}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{-2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{2} + 1)}{8} = \frac{1}{2}.$$

Dans ces conditions: $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

- $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$$\iff x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $x \in [\,0;\,\pi\,]$, la solution est: $\dfrac{3\pi}{4}$.

- $\cos(x) = \dfrac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{3} + 2\,k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $x \in [\,0;\,\pi\,]$, la solution est: $\dfrac{\pi}{3}$.

En conclusion, les solutions dans $[\,0;\,\pi\,]$ sont: $\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$.

2. Résolvons l'équation $4\cos^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ dans $I = [\,-2\pi;\,2\pi\,]$:

Soit l'équation: $4\cos^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ (1).

En posant $X = \cos(x)$, l'équation (1) devient: $4X^2 + 2(\sqrt{3} - 1)X - \sqrt{3} = 0$.

$\Delta = (2(\sqrt{3} - 1))^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{3}) = (2(\sqrt{3} + 1))^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes qui sont:

$$X' = \frac{-2(\sqrt{3} - 1) - 2(\sqrt{3} + 1)}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } X'' = \frac{-2(\sqrt{3} - 1) + 2(\sqrt{3} + 1)}{8} = \frac{1}{2}.$$

Dans ces conditions: $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

- $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$$\iff x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $x \in [-2\pi ; 2\pi]$, les solutions sont : $\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - 2\pi, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6} + 2\pi.$

- $\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $x \in [-2\pi ; 2\pi]$, les solutions sont : $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} + 2\pi.$

En conclusion, les solutions dans $[-2\pi ; 2\pi]$ sont :

$$\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - 2\pi, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6} + 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} + 2\pi.$$