1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Suites Numériques

Correction

SUITES DÉFINIES EXPLICITEMENT ET SENS DE VARIATION

CORRECTION

1. Étudions le sens de variation de la suite (U_n), avec $U_n = 3n - 6$ $(n \in \mathbb{N})$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = [3(n+1) - 6] - [3n - 6]$$

$$= 3n + 3 - 6 - 3n + 6.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = 3 > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2. Étudions le sens de variation de la suite (U_n), avec $U_n = -n^2 + 12$ $(n \in \mathbb{N})$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = [-(n+1)^2 + 12] - [-n^2 + 12]$$

$$= -n^2 - 1 - 2n + 12 + n^2 - 12.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = -(1 + 2n) < 0$ car $n \in \mathbb{N}$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Étudions le sens de variation de la suite (U_n), avec $U_n = \sqrt{3n+7}$ $(n \in \mathbb{N})$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = [\sqrt{3(n+1)+7}] - [\sqrt{3n+7}]$$

$$= \frac{([\sqrt{3(n+1)+7}] - [\sqrt{3n+7}]) \times ([\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}])}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]}$$

$$= \frac{(3(n+1)+7) - (3n+7)}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]} \quad ((a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2)$$

$$= \frac{3n+3+7-3n-7}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]},$$ avec:

- $[\sqrt{3(n+1)+7}] > 0$
- $\sqrt{3n+7} > 0$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3}{[\sqrt{3(n+1)+7}] + [\sqrt{3n+7}]} > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

4. Étudions le sens de variation de la suite (U_n), avec $U_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left[\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2}\right] - \left[\frac{n+1}{n+2}\right]$$

$$= \left[\frac{n+2}{n+3}\right] - \left[\frac{n+1}{n+2}\right].$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$ car $n \in \mathbb{N}$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

5. Étudions le sens de variation de la suite (U_n), avec $U_n = \dfrac{3^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$.

$$U_{n+1} - U_n = \left[\frac{3^{(n+1)}}{(n+1)}\right] - \left[\frac{3^n}{n}\right]$$

$$= \frac{3 \times 3^n}{n+1} - \frac{3^n}{n}$$

$$= \frac{3n\,3^n - n\,3^n - 3^n}{(n+1) \times n}, \quad \text{avec: } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3^n(2n-1)}{(n+1) \times n} > 0$ car $n \geq 1$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

$(2n - 1 \geq 1)$

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

6. Étudions le sens de variation de la suite (U_n), avec $U_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$.

$$U_{n+1} - U_n = \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right] - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right]$$

$$= \frac{2}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2 \times n \times (n+2) - (n+1) \times n - (n+1) \times (n+2)}{n \times (n+1) \times (n+2)}.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-2}{n \times (n+1) \times (n+2)} < 0$ car $n \geq 1$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: **strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.**