

# 1re

# MATHÉMATIQUES

## Enseignement de Spécialité

**Suites, Synthèse**

**Correction**

 [www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

## EXERCICE 3

[ Polynésie 2019 ]

1. Déterminons le pourcentage de réduction:

Soit  $x$  le pourcentage de réduction dont bénéficie Antoine.

$x$  est tel que:  $60 \text{ €} = (1 - x) \times (150 \times 0,60 \text{ €})$

$$\Leftrightarrow 60 = (1 - x) \times 90$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = 1 - x \text{ cad: } x = \frac{1}{3} \approx 33,33\%.$$

Ainsi le pourcentage de réduction proposé à Antoine est de: **33,33%**.

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,9 U_n + 24000$ :

• D'après l'énoncé, le 1<sup>er</sup> janvier 2017 il y a 60000 utilisateurs.

D'où:  $U_0 = 60000$  utilisateurs.

• De plus, chaque mois, on note que:

- 10% des propriétaires cessent d'utiliser la machine à café,
- et, 24000 nouveaux utilisateurs débarquent.

Soient: •  $U_{n+1}$ , le nombre d'utilisateurs de cette machine à café "  $n+1$  " mois après le 1<sup>er</sup> janvier 2017,

- $U_n$ , le nombre d'utilisateurs de cette machine à café " n " mois après le 1<sup>er</sup> janvier 2017.

Pour tout entier naturel  $n$ , le nombre d'utilisateurs de cette machine à café "  $n+1$  " mois après le 1<sup>er</sup> janvier 2017 est égal à celui  $U_n$  diminué de 10% et augmenté de 24000 nouveaux utilisateurs.

Pour tout entier naturel  $n$ :

$$U_{n+1} = U_n - 10\% \times U_n + 24000 \quad \text{cad: } U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 24000.$$

Au total, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons bien:  $U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 24000$ .

2. b. Montrons que la suite  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $V_0$  que l'on précisera:

$$V_n = U_n - 240000 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 240000, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 \times U_n + 24000) - 240000 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 240000 \Rightarrow V_0 = 60000 - 240000 = -180000$$

$$\text{et } U_n = V_n + 240000.$$

$$\text{Alors: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 [V_n + 240000] + 24000) - 240000$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9 V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,  $(V_n)$  est bien une suite géométrique de raison  $q = 0,9$  et de premier terme  $V_0 = -180000$ .

3. a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimons  $V_n$  en fonction de  $n$ :

Comme  $V_{n+1} = 0,9 V_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = V_0 \times (0,9)^n$  cad:  $V_n = -180\,000 \times (0,9)^n$ .

3. b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $U_n = -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000$ :

Nous savons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ : \*  $V_n = -180\,000 \times (0,9)^n$

$$* U_n = V_n + 240\,000.$$

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $U_n = -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000$ .

4. Déterminons le nombre de mois demandés:

Nous allons déterminer " $n$ "  $\in \mathbb{N}$  tel que:  $U_n > 230\,000$ .

$$U_n > 230\,000 \Leftrightarrow -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000 > 230\,000$$

$$\Leftrightarrow (0,9)^n < \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,9) < -\ln(18)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-\ln(18)}{\ln(0,9)}, \text{ car: } 0,9 \in ]0; 1[$$

$$\Rightarrow n > 28 \text{ mois, car } n \text{ est un entier naturel.}$$

**En conclusion:** au bout de 28 mois (après le 1<sup>er</sup> janvier 2017), le nombre d'utilisateurs de la machine à café dépassera pour la première fois 230 000.

5. Que pensons-nous de cette affirmation ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -180\,000 \times (0,9)^n + 240\,000$$

$$= 240\,000 \text{ utilisateurs} \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,9)^n = 0, \quad \text{car: } 0,9 \in ]0; 1[.$$

Cela signifie, qu'au bout de  $n$  mois ( " $n$ " très grand ), le nombre d'utilisateurs de la machine à café se stabilisera autour de 240 000.

Donc jamais, on dépassera 240 000 utilisateurs.

Au total, cette affirmation est donc: fausse !