

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Variables Aléatoires

&

$E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Correction

 www.freemaths.fr

LOTÉRIE AVEC GAIN ET PERTE

CORRECTION

1. Déterminons dans quel cas Alain gagnera effectivement 30 euros:

Alain gagnera effectivement 30 euros ssi son billet:

- se termine par 5: + 10 euros
- commence par 6: + 20 euros.

Et comme le billet est gagnant: il est remboursé, donc prix d'achat égal à 0 euro.

Dans ces conditions, si nous notons G le gain effectif d'Alain:

$$G = 10 \text{ euros} + 20 \text{ euros} - 0 \text{ euros} = 30 \text{ euros.}$$

2. a. Combien de billets permettent de gagner exactement 10 euros ?

Étant remboursé, pour gagner exactement 10 euros: le numéro du billet doit se terminer par 5.

Entre 1 et 100, 10 billets se terminent par 5. Les numéros de ces billets sont:

5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 et 95.

Or nous devons retirer le 65 car il rapporte 30 €.

Ainsi, 9 billets permettent de gagner exactement 10 euros.

2. b. Combien de billets permettent de gagner exactement 20 euros ?

Étant remboursé, pour gagner exactement 20 euros: le numéro du billet doit commencer par 6.

Entre 1 et 100, 10 billets commencent par 6. Les numéros de ces billets sont:

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68 et 69.

Or nous devons retirer le 65 car il rapporte 30 €.

Ainsi, 9 billets permettent de gagner exactement 20 euros.

2. c. Combien de billets permettent de gagner exactement 30 euros ?

Étant remboursé, pour gagner exactement 30 euros: le numéro du billet doit commencer par 6 et se terminer par 5.

Entre 1 et 100, 1 seul billet respecte ces deux conditions: le 65.

Ainsi, 1 seul billet permet de gagner exactement 30 euros.

3. Déterminons la loi de probabilité de X:

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v.a.) X sont:

10 euros, 20 euros, 30 euros, -4 euros (billet perdant).

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. X est:

$$X(\Omega) = \{ 10, 20, 30, -4 \}.$$

- Nous avons:
 - $P(X = 10 \text{ euros}) = \frac{9}{100} = 0,09;$
 - $P(X = 20 \text{ euros}) = \frac{9}{100} = 0,09;$
 - $P(X = 30 \text{ euros}) = \frac{1}{100} = 0,01;$
 - $P(X = -4 \text{ euros}) = 1 - \left(\frac{9}{100} + \frac{9}{100} + \frac{1}{100} \right) = 0,81.$

• La loi de probabilité de la v.a. X est donc:

x_i	10	20	30	-4
$P(X = x_i)$	9%	9%	1%	81%

4. Le jeu est-il équitable ?

D'après le cours: • un jeu est équitable quand $E(X) = 0$,

$$• E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i.$$

Ici: $E(X) = (9\% \times 10) + (9\% \times 20) + (1\% \times 30) + (81\% \times -4) = -0,24 \text{ euros}.$

Comme $E(X) < 0$: le jeu n'est pas équitable, il est défavorable au joueur.