1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Variables Aléatoires & $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Correction

DÉ ET POINTS GAGNÉS

CORRECTION

1. Recopions et complétons le tableau:

- **Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?**

X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de points gagnés à l'issue d'un lancer de ce dé.

Nous pouvons distinguer 4 gains différents:

- le numéro 1 apparaît: gain = 0 point
- le numéro 2 apparaît: gain = 2 points
- le numéro 3 apparaît: gain = 0 point
- le numéro 4 apparaît: gain = 2 points.

Les valeurs que peut prendre X sont donc: 0 point et 2 points.

Et par conséquent: $X(\Omega) = \{0 ; 2\}$.

- **$P(X = 0)$ et $P(X = 2)$?**

Nous avons:
- $P(X = 0) = P(\text{face obtenue} = 1) + P(\text{face obtenue} = 3)$
- $P(X = 2) = P(\text{face obtenue} = 2) + P(\text{face obtenue} = 4)$.

Or: • $P(\text{face obtenue} = 1) = \frac{2}{6}$

• $P(\text{face obtenue} = 3) = \frac{2}{6}$

• $P(\text{face obtenue} = 2) = \frac{1}{6}$

• $P(\text{face obtenue} = 4) = \frac{1}{6}$.

Dans ces conditions: $P(X = 0) = \frac{4}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{2}{6}$.

• **La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc:**

x_i	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

.

2. Calculons et interprétons l'espérance de X:

D'après le cours: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i$.

Ici: $E(X) = \left(\frac{2}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times 2\right)$

$= \frac{2}{3}$ point.

Au total: $E(X) = \frac{2}{3}$ point ce qui signifie qu'en moyenne le joueur peut gagner $\frac{2}{3}$ point.

3. **Recopions et complétons l'arbre de probabilités:**

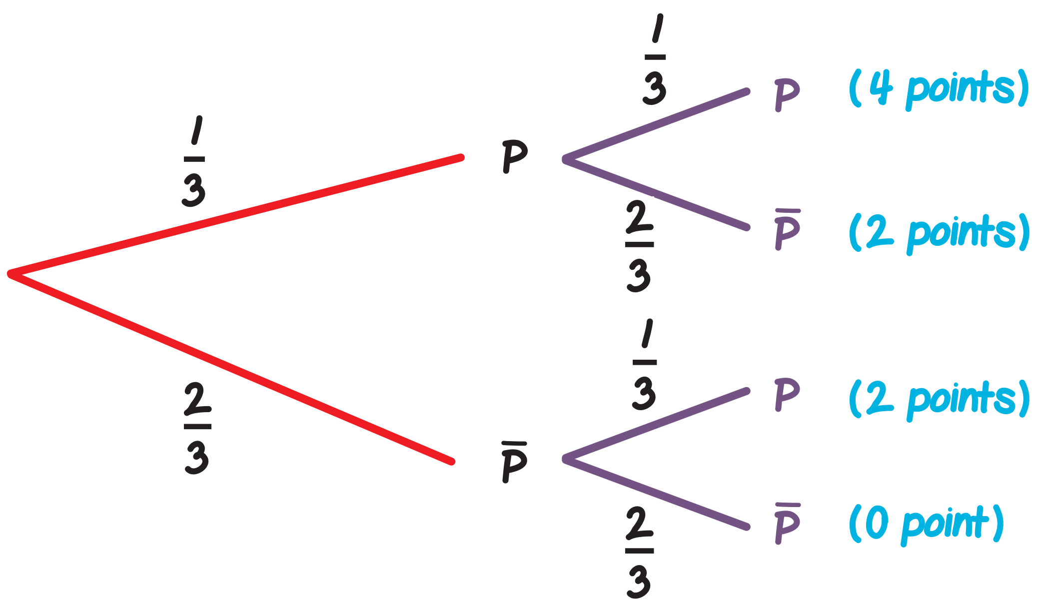
D'après l'énoncé, nous avons:

- P = " la face obtenue est paire "
- $\overline{P}$ = " la face obtenue est impaire ".

Or: • $P(P) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$

• $P(\overline{P}) = P(X = 0) = \frac{2}{3}$.

D'où l'arbre de probabilités suivant:



4. **Calculons la probabilité que le joueur gagne 2 points après deux lancers:**

Soit E, l'événement: " le joueur gagne 2 points après deux lancers ".

$E = (P \cap \overline{P}) \cup (\overline{P} \cap P)$.

D'où: $P(E) = P(P \cap \overline{P}) + P(\overline{P} \cap P)$

$= P_P(\overline{P}) \times P(P) + P_{\overline{P}}(P) \times P(\overline{P})$.

Ainsi: $P(E) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)$ cad $\mathbf{P(E) = \frac{4}{9}}$.

Au total, la probabilité que le joueur gagne 2 points après deux lancers est de: $\frac{4}{9}$.

5. Calculons la probabilité que le joueur gagne au moins 2 points à l'issue des deux lancers:

Soit F, l'événement: " le joueur gagne au moins 2 points à l'issue des deux lancers ".

$F = E \cup (P \cap P)$.

D'où: $P(F) = P(E) + P(P \cap P)$

$= P(E) + P_P(P) \times P(P)$.

Ainsi: $P(F) = \frac{4}{9} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right)$ cad $\mathbf{P(F) = \frac{5}{9}}$.

Au total, la probabilité que le joueur gagne au moins 2 points à l'issue des deux lancers est de: $\frac{5}{9}$.