1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Signe d’un polynôme
&
Inéquations

Correction

☛ www.freemaths.fr

TABLEAU DE SIGNES ET DEGRÉS " 3 " OU " 4 " !

CORRECTION

1. Étudions le signe sur IR de $f(x) = 2(x-3)(x-2)(x-1)$:

Notons que les trois racines de f sont: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x - 3$		-		-		-	0	+	
$x - 2$		-		-	0	+		+	
$x - 1$		-	0	+		+		+	
$(x-3)(x-2)(x-1)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

En conclusion:
- Si $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]1; 2[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]2; 3[$, $f(x) < 0$

- Si $x \in]3;+\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$, $f(x) = 0$.

2. Étudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = -4(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$:

Notons que les quatre racines de f sont: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = 4$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$x-4$		-		-		-		-	0	+	
$x-3$		-		-		-	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+		+		+	
$x-1$		-	0	+		+		+		+	
$(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

En conclusion:

- Si $x \in]-\infty;1[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]1;2[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]2;3[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]3;4[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]4;+\infty[$, $f(x) < 0$

• Si $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$, $f(x) = 0$.

3. Étudions le signe sur IR de $f(x) = (3 - 2x)(x^2 - 3x + 2)$:

Soit l'équation: $x^2 - 3x + 2 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = (1)^2 > 0$.

Détermination des deux racines:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$\bullet\ x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\bullet\ x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Ainsi, nous pouvons écrire f sous la forme: $f(x) = (3 - 2x)(x - 1)(x - 2)$.

Les trois racines de f sont donc: $1, \frac{3}{2}$ et 2.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion:
- Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]1 ; \frac{3}{2}[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]\frac{3}{2} ; 2[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]2 ; +\infty[$, $f(x) < 0$
- Si $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$ ou $x = 2$, $f(x) = 0$.

4. Étudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = -(x+3)(6x^2+5x-6)$:

Soit l'équation: $6x^2 + 5x - 6 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (5)^2 - 4 \times 6 \times (-6) = (13)^2 > 0$.

Détermination des deux racines:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$\bullet\ x_1 = \frac{-5 - 13}{12} = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet\ x_2 = \frac{-5 + 13}{12} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, nous pouvons écrire f sous la forme: $f(x) = -6\,(x + 3)\,(x + \frac{3}{2})\,(x - \frac{2}{3})$.

Les trois racines de f sont donc: -3, $-\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x + 3$		-	0	+		+		+	
$x + \frac{3}{2}$		-		-	0	+		+	
$x - \frac{2}{3}$		-		-		-	0	+	
$(x + 3)(x + \frac{3}{2})(x - \frac{2}{3})$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

En conclusion: • Si $x \in\ ]-\infty\,;-3\,[$, $f(x) > 0$

- Si $x \in]-3 ; -\frac{3}{2}[$, $f(x) < 0$

- Si $x \in]-\frac{3}{2} ; \frac{2}{3}[$, $f(x) > 0$

- Si $x \in]\frac{2}{3} ; +\infty[$, $f(x) < 0$

- Si $x = -3$ ou $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$, $f(x) = 0$.

5. Étudions le signe sur IR de $f(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)$:

- Soit l'équation: $x^2 + x - 2 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = (3)^2 > 0$.

Détermination des deux racines:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

- $x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$

- $x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$.

- Soit l'équation: $x^2 - 5x + 6 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = (1)^2 > 0$.

Détermination des deux racines:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$\bullet\ x_3 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\bullet\ x_4 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Ainsi, nous pouvons écrire f sous la forme:

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Les quatre racines de f sont donc: -2, 1, 2 et 3.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion: • Si $x \in]-\infty ; -2[$, $f(x) > 0$

• Si $x \in]-2 ; 1[$, $f(x) < 0$

- Si $x \in]1;2[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]2;3[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]3;+\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = -2$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$, $f(x) = 0$.

6. Étudions le signe sur IR de $f(x) = -3(x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 5x + 2)$:

- Soit l'équation: $x^2 - 5x + 3 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13 > 0$.

Détermination des deux racines:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

- $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2}$
- $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

- Soit l'équation: $2x^2 + 5x + 2 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = (3)^2 > 0$.

Détermination des deux racines:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$\bullet\ x_3 = \frac{-5-3}{4} = -2$$

$$\bullet\ x_4 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, nous pouvons écrire f sous la forme:

$$f(x) = -6\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x + 2)\,(x + \frac{1}{2}).$$

Les quatre racines de f sont donc: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$x - x_1$	-		-		-	0	+		+
$x - x_2$	-		-		-		-	0	+
$x + 2$	-	0	+		+		+		+
$x + \frac{1}{2}$	-		-	0	+		+		+
$(x - x_1)(x - x_2)(x + 2)(x + \frac{1}{2})$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

En conclusion: • Si $x \in]-\infty ; -2[$, $f(x) < 0$

• Si $x \in]-2 ; -\frac{1}{2}[$, $f(x) > 0$

• Si $x \in]-\frac{1}{2} ; \frac{5-\sqrt{13}}{2}[$, $f(x) < 0$

• Si $x \in]\frac{5-\sqrt{13}}{2} ; \frac{5+\sqrt{13}}{2}[$, $f(x) > 0$

• Si $x \in]\frac{5+\sqrt{13}}{2} ; +\infty[$, $f(x) < 0$

• Si $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = x_1$ ou $x = x_2$, $f(x) = 0$.

7. Étudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = -(x^2 - 2x + 1)(x - 7)$:

Soit l'équation: $x^2 - 2x + 1 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$.

Détermination de la racine double:

Comme $\Delta = 0$, nous sommes en présence d'une racine double (solution unique):

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Ici: $x_0 = \frac{2}{2} = 1$.

Ainsi, nous pouvons écrire f sous la forme: $f(x) = -(x - 1)^2(x - 7)$.

Les deux racines sont donc: 1 et 7.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	0	+		+	
$x-7$		-		-	0	+	
$(x-1)^2(x-7)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$		+	0	+	0	-	

En conclusion:
- Si $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]1; 7[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]7; +\infty[$, $f(x) < 0$
- Si $x = 1$ ou $x = 7$, $f(x) = 0$.

8. Étudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = (x+6)(3x^2 - 2x + 1)$:

Soit l'équation: $3x^2 - 2x + 1 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$.

Comme $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, f s'écrit toujours sous la forme: $f(x) = (x + 6)(3x^2 - 2x + 1)$.

La seule racine est donc: -6.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$x + 6$		$-$	0	$+$	
$3x^2 - 2x + 1$			$+$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	

En conclusion:
- Si $x \in]-\infty; -6[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]-6; +\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = -6$, $f(x) = 0$.