1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Signe d'un polynôme & Inéquations

Correction

DEUX MANIÈRES DIFFÉRENTES !

CORRECTION

1. Étudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = -2(x+2)(x+\frac{1}{2})$:

Méthode 1:

Notons que les deux racines de f sont: $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x+\frac{1}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-2(x+2)(x+\frac{1}{2})$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion: • Si $x \in]-\infty ; -2[$, $f(x) < 0$

• Si $x \in]-2 ; -\frac{1}{2}[$, $f(x) > 0$

• Si $x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[$, $f(x) < 0$

• Si $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = 0$.

Méthode 2:

$f(x) = -2(x+2)(x+\frac{1}{2}) \iff f(x) = -2x^2 - 5x - 2.$

Il s'agit ici de déterminer le tableau de signes de $f(x) = -2x^2 - 5x - 2$.

$(f(x) = ax^2 + bx + c)$

• **Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$**:

Ici: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = (3)^2 > 0.$

• **Détermination des deux racines**:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ici: • $x_1 = \frac{5 - 3}{-4} = -\frac{1}{2}$

• $x_2 = \frac{5 + 3}{-4} = -2.$

• **Le tableau de signes**:

Le tableau de signes de f est: $(a = -2 < 0)$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ $-\frac{1}{2}$ $\quad$ $+\infty$
signe de $f(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

En conclusion: • Si $x \in]-\infty ; -2 [$, $f(x) < 0$

• Si $x \in]-2 ; -\frac{1}{2} [$, $f(x) > 0$

• Si $x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty [$, $f(x) < 0$

• Si $x = -2$ ou $x = -\frac{1}{2}$, $f(x) = 0$.

2. Étudions le signe sur IR de $f(x) = (3x - 2)(2x + 3)$:

Méthode 1:

Notons que les deux racines de f sont: $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

Dans ces conditions nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-2)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion:

- Si $x \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]-\frac{3}{2} ; \frac{2}{3}[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]\frac{2}{3} ; +\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$, $f(x) = 0$.

Méthode 2:

$f(x) = (3x - 2)(2x + 3)$ <=> $f(x) = 6x^2 + 5x - 6$.

Il s'agit ici de déterminer le tableau de signes de $f(x) = 6x^2 + 5x - 6$.

($f(x) = ax^2 + bx + c$)

- **Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:**

Ici: $\Delta = (5)^2 - 4 \times 6 \times (-6) = (13)^2 > 0$.

- **Détermination des deux racines:**

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ici: • $x_1 = \frac{-5-13}{12} = -\frac{3}{2}$

• $x_2 = \frac{-5+13}{12} = \frac{2}{3}.$

• **Le tableau de signes**:

Le tableau de signes de f est: $(a = 6 > 0)$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

En conclusion: • Si $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$, $f(x) > 0$

• Si $x \in \left]-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right[$, $f(x) < 0$

• Si $x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $f(x) > 0$

• Si $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$, $f(x) = 0$.

3. Étudions le signe sur IR de $f(x) = -3(-x+1)(x-9)$:

Méthode 1:

Notons que les deux racines de f sont: $x_1 = 1$ et $x_2 = 9$.

Dans ces conditions nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$-x+1$		+	0	-		-	
$x-9$		-		-	0	+	
$(-x+1)(x-9)$		-	0	+	0	-	
$-3(-x+1)(x-9)$		+	0	-	0	+	

En conclusion:

- Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]1 ; 9[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]9 ; +\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = 1$ ou $x = 9$, $f(x) = 0$.

Méthode 2:

$f(x) = -3(-x+1)(x-9)$ <=> $f(x) = 3x^2 - 30x + 27$.

Il s'agit ici de déterminer le tableau de signes de $f(x) = 3x^2 - 30x + 27$.

$(\ f(x) = ax^2 + bx + c\ )$

- Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:

Ici: $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 3 \times 27 = (24)^2 > 0$.

• **Détermination des deux racines**:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ici: • $x_1 = \dfrac{30 - 24}{6} = 1$

• $x_2 = \dfrac{30 + 24}{6} = 9$.

• **Le tableau de signes**:

Le tableau de signes de f est: $(a = 3 > 0)$

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

En conclusion:
• Si $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) > 0$

• Si $x \in]1 ; 9[$, $f(x) < 0$

• Si $x \in]9 ; +\infty[$, $f(x) > 0$

• Si $x = 1$ ou $x = 9$, $f(x) = 0$.

4. Étudions le signe sur IR de $f(x) = (2x - 4)(x + 3)$:

Méthode 1:

Notons que les deux racines de f sont: $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.

Dans ces conditions nous avons le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x - 4)(x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion:

- Si $x \in]-\infty ; -3[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]-3 ; 2[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]2 ; +\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = -3$ ou $x = 2$, $f(x) = 0$.

Méthode 2:

$f(x) = (2x - 4)(x + 3) \iff f(x) = 2x^2 + 2x - 12$.

Il s'agit ici de déterminer le tableau de signes de $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$.

$(\, f(x) = ax^2 + bx + c \,)$

- **Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$:**

Ici: $\Delta = (2)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = (10)^2 > 0$.

- **Détermination des deux racines**:

Comme $\Delta > 0$, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ici: • $x_1 = \dfrac{-2-10}{4} = -3$

• $x_2 = \dfrac{-2+10}{4} = 2.$

- **Le tableau de signes**:

Le tableau de signes de f est: $(a = 2 > 0)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

En conclusion:

- Si $x \in]-\infty; -3[$, $f(x) > 0$
- Si $x \in]-3; 2[$, $f(x) < 0$
- Si $x \in]2; +\infty[$, $f(x) > 0$
- Si $x = -3$ ou $x = 2$, $f(x) = 0$.