1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Équations du second degré

Correction

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ : ON COMPLIQUE !

CORRECTION

1. $f(x) = 2x^2 + (2\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}$:

a. L'ensemble de définition:

Ici: $Df = \mathbb{R}$.

b. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \iff 2x^2 + (2\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

• Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (2\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \times 2 \times (-\sqrt{3}) = 13 + 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 1)^2 > 0$.

• Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes:

• $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi ici:

• $x_1 = \dfrac{-(2\sqrt{3} - 1) - (2\sqrt{3} + 1)}{4} = -\sqrt{3}$

• $x_2 = \dfrac{-(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 1)}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet 2 racines distinctes: $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2}$.

2. $f(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3} - 2$:

a. L'ensemble de définition:

Il faut que: $x - 2 \neq 0$ et $x + 3 \neq 0$ cad $x \neq 2$ et $x \neq -3$.

D'où: $Df = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

b. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3} - 2 = 0$$

$$\iff \frac{3(x+3) + 5(x-2) - 2(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)} = 0$$

$$\iff -2x^2 + 6x + 11 = 0. \quad (ax^2 + bx + c = 0)$$

(On élimine le dénominateur car: $(x-2)(x+3) \neq 0$ sur Df)

• Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times 11 = 124 = (12)^2 > 0$.

• Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes: • $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi ici: • $x_1 = \frac{-6 - 12}{-4} = \frac{9}{2}$

• $x_2 = \dfrac{-6+12}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet 2 racines distinctes: $x_1 = \dfrac{9}{2}$ et $x_2 = -\dfrac{3}{2}$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x^2}$:

a. L'ensemble de définition:

Il faut que: $x - 1 \neq 0$ et $x^2 \neq 0$ cad $x \neq 1$ et $x \neq 0$.

D'où: $Df = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

b. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2} = 0 \iff \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2(x-1)} = 0$$

$$\iff x^2 + 3x - 3 = 0. \quad (ax^2 + bx + c = 0)$$

(On élimine le dénominateur car: $x^2(x-1) \neq 0$ sur Df)

• Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 21 > 0$.

• Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes: • $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

• $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi ici: • $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$

• $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet 2 racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}.$$

4. $f(x) = \sqrt{5x+6} - x - 2$:

a. L'ensemble de définition:

Il faut que: $5x + 6 \geqslant 0$ cad $x \geqslant -\dfrac{6}{5}$.

D'où: $Df = [-\dfrac{6}{5} ; +\infty[$.

b. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \iff \sqrt{5x+6} - x - 2 = 0 \iff \sqrt{5x+6} = x + 2 > 0$ sur Df

$\iff 5x + 6 = (x+2)^2$

$\iff x^2 - x - 2 = 0.$ $(ax^2 + bx + c = 0)$

• Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = (3)^2 > 0$.

• Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes: • $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

• $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi ici: • $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

• $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2.$

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet 2 racines distinctes: $x_1 = -1$ et $x_2 = 2.$

5. $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x} - 1$:

a. L'ensemble de définition:

Il faut que: $x + 3 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ cad $x \geqslant -3$ et $x \geqslant 0.$

D'où: $Df = [\,0\,; +\infty\,[.$

b. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \sqrt{x+3} - \sqrt{x} - 1 = 0 \iff \sqrt{x+3} = \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ sur } Df$$
$$\iff x + 3 = (\sqrt{x} + 1)^2$$
$$\iff x + 3 = x + 1 + 2\sqrt{x}$$
$$\iff 2\sqrt{x} = 2$$
$$\iff \sqrt{x} = 1.$$

Comme $x \geqslant 0$, une seule solution: $x = 1.$

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution: $x = 1.$

6. $f(x) = \dfrac{x}{3x+4} - \dfrac{x-1}{4x}$:

a. L'ensemble de définition:

Il faut que: $3x + 4 \neq 0$ et $4x \neq 0$ cad $x \neq -\frac{4}{3}$ et $x \neq 0$.

D'où: $Df = \mathbb{R} - \{-\frac{4}{3}, 0\}$.

b. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \frac{x}{3x+4} - \frac{x-1}{4x} = 0 \iff \frac{x(4x) - (x-1)(3x+4)}{(3x+4)(4x)} = 0$$

$$\iff x^2 - x + 4 = 0. \quad (ax^2 + bx + c = 0)$$

(On élimine le dénominateur car: $(3x+4)(4x) \neq 0$ sur Df)

- Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$.

- Les solutions ?

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution sur Df.

Au total, l'équation $f(x) = 0$, n'admet aucune solution sur Df.